А. А. ГУСАК

Задачи и упражнения по высшей математике

В двух частях

Часть 1

Издание второе, переработанное

Допущено Государственным комитетом СССР
по народному образованию
в качестве учебного пособия для студентов
естественных специальностей вузов

Минск
«Вышэйшая школа»
1988

ББК 22.11я73
Г96
УДК 51(076.1)(075.8)

Рецензенты: кафедра общей математики механико-математического факультета Ленинградского государственного университета им. А. А. Жданова; д-р физ.-мат. наук, проф. Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова *К. А. Рыбников*

Гусак А. А.

Г96 Задачи и упражнения по высшей математике: В 2 ч. Ч. 1: Для вузов.— 2-е изд., перераб.— Мн.: Выш. шк., 1988.— 247 с.: ил.
ISBN 5-339-00005-2.

Содержатся задачи и упражнения по следующим разделам: аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве, основы векторной алгебры, введение в анализ, дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной, системы линейных алгебраических уравнений, приближенное решение уравнений. Приводятся необходимые теоретические сведения, примеры решения задач.

Для студентов естественных специальностей вузов.

Первое издание вышло в 1972 г.

$$Г\ \frac{1702010000-116}{М304(03)-88}\ 6-88$$

ББК 22.11я73

ISBN 5-339-00005-2(Ч.1)
ISBN 5-339-00276-4

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемое учебное пособие написано на основе лекций и практических занятий по курсу «Высшая математика», проводимых на химическом, биологическом и географическом факультетах Белорусского государственного университета им. В. И. Ленина. Его содержание соответствует программам по данному курсу для студентов естественных специальностей университетов.

Пособие состоит из двух частей. Первая часть включает разделы: «Аналитическая геометрия на плоскости», «Основы векторной алгебры и аналитической геометрии в пространстве», «Введение в анализ», «Дифференциальное исчисление функций одной переменной», «Интегральное исчисление функций одной переменной», «Матрицы и определители. Линейные системы. Приближенное решение уравнений».

Книга имеет следующую структуру. В начале каждого параграфа даны краткие теоретические сведения (основные понятия, определения, формулы, уравнения); далее рассматриваются примеры решения задач различной степени трудности, приводится набор задач и упражнений для самостоятельной работы студентов (на аудиторных занятиях и при выполнении домашних заданий). Кроме того, в первой части пособия содержатся: задачи для индивидуальных заданий по отдельным темам (линии второго порядка, поверхности второго порядка, дифференцирование и интегрирование функций, построение графиков и др.); примеры и задачи по физике и химии, решаемые с помощью математических методов; задачи повышенной трудности и нестандартные задачи. В конце книги даны ответы к задачам и указания для решения наиболее трудных из них.

В приложениях приведены графики некоторых функций и некоторые линии.

Отличительной чертой первой части данного пособия является то, что в ней уделено должное внимание вычислительным методам. Подробно рассмотрено применение методов приближенного вычисления определенного интеграла (включая точность оценки погрешности полученного результата, выбор шага разбиения промежутка интегрирования). При решении систем линейных уравнений используется не только простейшая схема метода последовательного исключения неизвестных, но и схема с выбором главного элемента. На конкретных примерах проиллюстрировано применение различных методов приближенного решения алгебраических и трансцендентных уравнений.

Отмеченные особенности структуры пособия облегчают его использование студентами при самостоятельной работе, роль которой будет повышаться в связи с перестройкой высшей школы.

Опыт использования данного учебного пособия показал, что желательно увеличить число задач в некоторых параграфах (относящихся к пределам функций, несобственным интегралам, матрицам, системам линейных уравнений и др.), поэтому во втором издании в соответствующие параграфы включены дополнительно новые задачи и упражнения. Некоторые примеры заменены новыми. Кроме того, внесены изменения в распределение материала между двумя частями книги. Раздел «Основы векторной алгебры и аналитической геометрии в пространстве» из второй части перенесен в первую часть, причем соответствующие три главы (из пяти) объединены в одну («Прямая и плоскость в пространстве»). Такое перераспределение материала сделает книгу более удобной для использования ее студентами: в первую часть включен весь материал, который изучается в первом семестре.

Автор выражает искреннюю благодарность рецензентам — коллективу кафедры общей математики механико-математического факультета ЛГУ и д-ру физ.-мат. наук, проф. МГУ К. А. Рыбникову, а также сотрудникам БГУ канд. физ.-мат. наук, доц. В. Г. Скатецкому, преподавателям Т. В. Адамчук и Л. И. Ведерниковой — за ценные замечания и советы, способствовавшие улучшению книги.

Все отзывы и пожелания просьба присылать по адресу: 220048, Минск, проспект Машерова, 11, издательство «Вышэйшая школа».

Автор

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

1. КООРДИНАТЫ НА ПРЯМОЙ И НА ПЛОСКОСТИ. ПРОСТЕЙШИЕ ЗАДАЧИ

Координатами точки называют числа, определяющие ее положение на прямой, плоскости или в пространстве. Метод координат позволяет сводить геометрические задачи к алгебраическим.

1.1. Координаты на прямой

Зафиксируем на некоторой прямой одно из двух определяемых ею направлений и назовем его *положительным*, а другое — *отрицательным*. Прямую, на которой указано положительное направление, назовем *осью*.

Отрезок, ограниченный точками A и B, называют *направленным отрезком* или *вектором*, если указано, какая из данных точек является его началом и какая — концом. Направленный отрезок с началом в точке A и концом в точке B обозначают так: $\overline{AB}$.

Величиной направленного отрезка $\overline{AB}$ некоторой оси называют его длину, взятую со знаком плюс, если направление этого отрезка совпадает с положительным направлением данной оси, и со знаком минус, если оно совпадает с отрицательным направлением оси. Величину направленного отрезка $\overline{AB}$ обозначают AB.

Координатной осью называют прямую, на которой зафиксированы начало отсчета, положительное направление и выбран масштаб для измерения длин.

Рис. 1.1

Координатой точки M координатной оси (рис. 1.1) называют величину направленного отрезка $\overline{OM}$, где O — начало координат. Если обозначить координату точки M через x, то по определению

$$x = OM.$$

Запись $M(x)$ означает, что точка M имеет координату x.

Если даны две точки $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$, то величину направленного отрезка $\overline{M_1M_2}$ вычисляют по формуле

$$M_1M_2 = x_2 - x_1, \tag{1.1}$$

а расстояние между этими точками — по формуле

$$\rho(M_1, M_2) = |x_2 - x_1|. \tag{1.2}$$

Простым отношением трех различных точек M_1, M_2, M, лежащих на одной прямой и взятых в указанном порядке, называют число

$$\lambda = \frac{M_1M}{MM_2}, \tag{1.3}$$

где M_1M, MM_2 — величины направленных отрезков соответственно $\overline{M_1M}$ и $\overline{MM_2}$.

Если точка M принадлежит отрезку $\overline{M_1M_2}$, то простое отношение положительно ($\lambda > 0$), так как числитель и знаменатель в формуле (1.3) одного знака. В этом случае говорят, что точка M делит отрезок $\overline{M_1M_2}$ внутренним образом. Если точка M лежит вне отрезка $\overline{M_1M_2}$, то $\lambda < 0$ (так как числитель и знаменатель в формуле (1.3) имеют противоположные знаки). В этом случае говорят, что точка M делит отрезок $\overline{M_1M_2}$ внешним образом. Если точки M_1 и M совпадают, то $\lambda = 0$.

Пусть $M_1(x_1)$, $M_2(x_2)$, $M(x)$ — точки координатной оси Ox. Тогда

$$\lambda = \frac{M_1M}{MM_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x}, \tag{1.4}$$

откуда

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}. \tag{1.5}$$

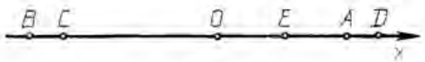


Рис. 1.2

Формула (1.5) определяет координату точки M, делящей направленный отрезок $\overline{M_1M_2}$ в данном отношении λ.

Если точка M совпадает с серединой отрезка $\overline{M_1M_2}$, то $\lambda = 1$, поэтому ее координата определяется формулой

$$x = (x_1 + x_2)/2. \tag{1.6}$$

Примеры. 1. На координатной оси построить точки $A(2)$, $B(-3)$, $C(-5/2)$, $D(\sqrt{5})$.

Возьмем произвольную прямую, выберем точку O — начало координат и единичную точку E (рис. 1.2). Отложив две единицы (в качестве единицы длины взят отрезок OE) вправо от точки O (при указанном расположении точек O и E), получим точку A. Отложив три единицы влево от точки O, получим точку B. Аналогично строим точку C. Чтобы построить точку D, отложим от точки O вправо отрезок длины $\sqrt{5}$, найденный из прямоугольного треугольника, катеты которого $a = 1$, $b = 2$.

2. Даны точки $A(3)$, $B(-2)$, $C(-7)$, $D(4)$. Найти величины направленных отрезков $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{BD}$, $\overline{DA}$ и их длины.

По формулам (1.1) и (1.2) находим:

$$\begin{aligned} AB &= (-2) - 3 = -5, & \rho(A, B) &= 5; \\ CD &= 4 - (-7) = 11, & \rho(C, D) &= 11; \\ BD &= 4 - (-2) = 6, & \rho(B, D) &= 6; \\ DA &= 3 - 4 = -1, & \rho(D, A) &= 1. \end{aligned}$$

3. Найти отношение, в котором точка $M(5)$ делит отрезок M_1M_2, где $M_1(2)$, $M_2(7)$.

Так как по условию $x_1 = 2$, $x_2 = 7$, $x = 5$, то, согласно формуле (1.4), имеем

$$\lambda = \frac{M_1M}{MM_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{5 - 2}{7 - 5} = \frac{3}{2}.$$

4. Найти точку, делящую отрезок $\overline{M_1M_2}$, где $M_1(-3)$, $M_2(1)$, в отношении $\lambda = -2$, и середину отрезка M_1M_2.

Пусть $M(x)$ — искомая точка. Поскольку по условию $x_1 = -3$, $x_2 = 1$, $\lambda = -2$, то, согласно формуле (1.5),

$$x = \frac{-3 + (-2)\,1}{1 + (-2)} = 5.$$

Координата точки, являющейся серединой отрезка $\overline{M_1M_2}$, находится по формуле (1.6):

$$x = (-3 + 1)/2 = -1.$$

1.1. На координатной оси построить точки $A(3)$, $B(-4)$, $C(-3/4)$ $D(\sqrt{3})$, $F(-\sqrt{10})$.

1.2. Построить точки, координаты которых удовлетворяют уравнениям:

1) $x^2 - 3x = 0$; 2) $x^2 - 5x + 6 = 0$;
3) $x^2 - 2x - 7 = 0$; 4) $x^3 + 4x^2 - 20x = 0$;
5) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$; 6) $|x + 2| = 2$.

1.3. Какая из двух точек A и B расположена левее: 1) $A(a)$, $B(-a)$; 2) $A(a)$, $B(a+4)$; 3) $A(a)$, $B(3a)$; 4) $A(x)$, $B(x-c)$?

1.4. Найти величины отрезков $\overline{M_1M_2}$: 1) $M_1(2)$, $M_2(5)$; 2) $M_1(3)$, $M_2(-4)$; 3) $M_1(-6)$, $M_2(8)$; 4) $M_1(-2)$, $M_2(-7)$; 5) $M_1(9)$, $M_2(6)$.

1.5. Найти длины отрезков $\overline{M_1M_2}$: 1) $M_1(3)$, $M_2(8)$; 2) $M_1(4)$, $M_2(-9)$; 3) $M_1(-5)$, $M_2(1)$; 4) $M_1(-3)$, $M_2(-8)$.

1.6. Найти координату точки A, если известно: 1) $B(2)$, $AB = 5$; 2) $B(3)$, $BA = -2$.

1.7. Найти координату точки B, если известно: 1) $A(-4)$, $AB = 7$; 2) $A(5)$, $BA = -3$.

1.8. Найти отношение λ, в котором данная точка $M(2)$ делит отрезок $\overline{AB}$: 1) $A(1)$, $B(7)$; 2) $A(-3)$, $B(-1)$; 3) $A(2)$, $B(9)$.

1.9. Найти точку M, делящую данный отрезок, ограниченный точками $A(2)$, $B(5)$, в данном отношении λ: 1) $\lambda = 3$; 2) $\lambda = 1/2$.

1.10 Найти середину C отрезка $\overline{AB}$: 1) $A(5)$, $B(7)$; 2) $A(-3)$, $B(9)$; 3) $A(-1)$, $B(-5)$; 4) $A(-4)$, $B(4)$; 5) $A(8)$, $B(-2)$.

1.11. Найти точку A, если известно, что $C(3)$ — середина отрезка AB, где $B(-7)$.

1.12. Найти точку B, если известно, что $C(-2)$ — середина отрезка $\overline{AB}$, где $A(-6)$.

1.13. Даны две точки $A(4)$, $B(-2)$. Найти точку M, симметричную точке A относительно точки B, и точку N, симметричную точке B относительно точки A.

1.14. Отрезок, ограниченный точками $A(-6)$ и $B(22)$, разделен на четыре равные части. Найти точки деления.

1.15. Найти координаты концов A и B отрезка, который точками $P(-3)$ и $Q(2)$ разделен на три равные части.

1.16. Где лежат точки, координаты которых удовлетворяют соотношениям: 1) $|x| < 4$; 2) $|x| \leqslant 5$; 3) $|x| > 3$; 4) $|x| \geqslant 2$; 5) $3 < |x| < 5$; 6) $2 \leqslant |x| \leqslant 4$; 7) $2x - 5 \leqslant 0$.

1.17. Даны три точки $A(-3)$, $B(1)$, $C(2)$. Найти отношение, в котором каждая из этих точек делит отрезок между двумя другими точками.

1.2. Координаты на плоскости

Прямоугольными декартовыми координатами точки M называют числа, определяемые формулами:

$$x = OM_x, \ y = OM_y,$$

где OM_x — величина отрезка $\overline{OM_x}$ оси Ox; OM_y — величина направленного отрезка $\overline{OM_y}$ оси Oy (рис. 1.3).

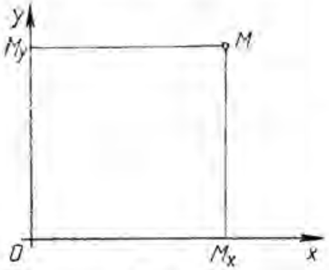


Рис. 1.3

Полярная система координат на плоскости определяется точкой O (*полюс*), исходящим из нее лучом OP (*полярная ось*), масштабным отрезком e и направлением отсчета углов (рис. 1.4, *а*).

Полярными координатами точки M, не совпадающей с полюсом, называют расстояние $\rho > 0$ (*полярный радиус*) от точки M до полюса O и величину угла φ (*полярный угол*) между полярной осью OP и лучом OM. Для полюса считают $\rho = 0$ (φ не определено). Полярный угол имеет бесконечное множество значений. Значение, удовлетворяющее условию $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, называют *главным*.

При соответствующем выборе прямоугольной декартовой и полярной систем координат (рис. 1.4, *б*) связь между декартовыми координатами x и y точки M и ее полярными координатами ρ и φ выражается формулами:

$$x = \rho\cos\varphi, \ y = \rho\sin\varphi; \tag{1.7}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \ \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

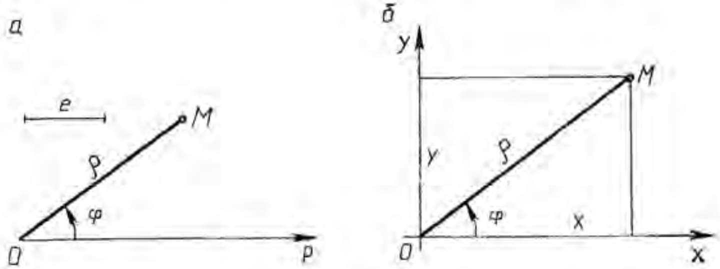


Рис. 1.4

Примеры. 1. Относительно прямоугольной декартовой системы координат построить точки $A(-3, 2)$, $B(4, 1)$, $C(-2, -5)$, $D(3, -4)$, $E(-2, 0)$, $F(0, 3)$.

Рассмотрим две взаимно перпендикулярные прямые, отметим на них положительные направления, как показано на рис. 1.5, точку их пересечения обозначим буквой O, выберем масштабный отрезок MN. В данной прямоугольной декартовой системе координат построим точку $A(-3, 2)$. Влево от точки O на оси Ox отложим отрезок OA_1, равный трем единицам длины, вверх от точки O по оси Oy отложим отрезок OA_2, равный двум единицам длины. Через точку A_1 проведем прямую, параллельную оси Oy (или перпендикулярную к оси Ox), через точку A_2 — прямую, параллельную оси Ox (или перпендикулярную к оси Oy). Точка пересечения построенных прямых и будет искомой точкой A.

Аналогично строим точки B, C, D, E и F. Отметим, что точка E лежит на оси Ox, точка F — на оси Oy.

2. В полярной системе координат построить точки $A(2, \pi/4)$, $B(3, -3\pi/4)$, $C(1, \pi/2)$, $D(3, \pi)$, $E(4, 0)$, $F(2, -\pi/2)$. Найти прямоугольные декартовы координаты этих точек в системе, для которой полюс совпадает с началом координат, полярная ось — с положительной полуосью Ox.

Чтобы построить точку A, проведем из точки O луч под углом $\varphi = \pi/4$ к полярной оси OP (рис. 1.6). На этом луче построим отрезок OA, длина которого равна двум. Конец отрезка OA и будет искомой точкой. Аналогично построим точки B, C, D, E, F.

Найдем прямоугольные декартовы координаты данных точек по формулам (1.7). Для точки A

$$x = 2\cos\frac{\pi}{4} = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}, \ y = 2\sin\frac{\pi}{4} = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2},$$

т. е. $A(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

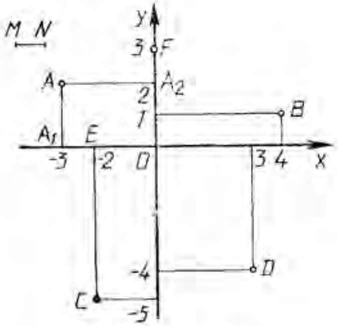


Рис. 1.5

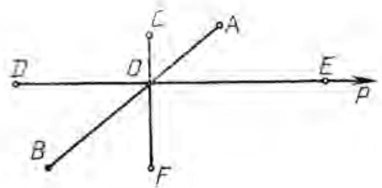


Рис. 1.6

Аналогично получаем, что в указанной прямоугольной декартовой системе координат $B(-3\sqrt{2}/2, \ -3\sqrt{2}/2)$, $C(0, 1)$, $D(-3, 0)$, $E(4, 0)$, $F(0, -2)$.

1.18. Относительно прямоугольной системы координат построить точки $A(1, 4)$, $B(2, -3)$, $C(-3, 5)$, $D(-1, -2)$, $E(1, 1)$, $F(0, 1)$, $G(9, 0)$, $K(1, \sqrt{10})$, $L(-\sqrt{5}, 3)$, $M(\sqrt{7}, -\sqrt{15})$, $N(0{,}5; 3{,}75)$.

1.19. Найти точки, симметричные соответственно точкам $A(3, 4)$, $B(-2, 5)$, $C(-3, -3)$, $D(6, -7)$ относительно оси Ox.

1.20. Найти точки, симметричные точкам $A(4, 2)$, $B(-3, 1)$, $C(2, -5)$, $D(-1, -4)$, $E(1, 1)$ относительно оси Oy.

1.21. Найти точки, симметричные точкам $A(-1, 2)$, $B(-3, -2)$, $C(4, 7)$, $D(5, -4)$, $E(1, 1)$ относительно начала координат.

1.22. Найти точки, симметричные точкам $A(2, -1)$, $B(3, 5)$, $C(-4, -3)$ относительно биссектрисы первого координатного угла.

1.23. Найти точки, симметричные точкам $A(-3, -1)$, $B(-2, 4)$, $C(5, -6)$, $D(8, 9)$ относительно биссектрисы второго координатного угла.

1.24. В прямоугольной декартовой системе координат дан треугольник с вершинами $A(1, 2)$, $B(2, 6)$, $C(4, 5)$. Найти треугольник $A'B'C'$, симметричный треугольнику ABC относительно: 1) оси Ox;

2) оси Oy; 3) начала координат; 4) биссектрисы первого координатного угла; 5) биссектрисы второго координатного угла.

1.25. Найти геометрическое место точек $M(x, y)$, бóльшая координата которых равна двум, т. е. $\max(x, y) = 2$.

1.26. Найти геометрическое место точек $M(x, y)$, меньшая координата которых равна двум, т. е. $\min(x, y) = 2$.

1.27. Найти точки, симметричные относительно полюса соответственно точкам: $A\left(2, -\frac{\pi}{6}\right)$, $B\left(3, \frac{\pi}{4}\right)$, $C\left(1, \frac{\pi}{3}\right)$, $D\left(4, -\frac{\pi}{2}\right)$.

1.28. Найти прямоугольные декартовы координаты точек, заданных полярными координатами: $A\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$, $B\left(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$, $C\left(6, -\frac{\pi}{2}\right)$, $D\left(3, -\frac{\pi}{6}\right)$, $E\left(4, -\frac{\pi}{2}\right)$, $F(5, \pi)$, $G(7, 2\pi)$.

1.29. Зная прямоугольные декартовы координаты точек $A(-1, 1)$, $B(0, 2)$, $C(3, 0)$, $D(8, -6)$, $E(1, 1)$, $F(-2, -2)$, найти их полярные координаты.

1.3. Расстояние между двумя точками на плоскости

В прямоугольной декартовой системе координат расстояние между двумя точками $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ определяется формулой

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (1.8)$$

Примеры. 1. Вычислить периметр треугольника с вершинами в точках $A(-1, -3)$, $B(2, -3)$, $C(2, 1)$.

Чтобы найти периметр треугольника, необходимо знать длины его сторон. По формуле (1.8) находим:

$$d_1 = \rho(A, B) = \sqrt{[2-(-1)]^2 + [-3-(-3)]^2} = 3,$$
$$d_2 = \rho(B, C) = \sqrt{(2-2)^2 + [1-(-3)]^2} = 4,$$
$$d_3 = \rho(A, C) = \sqrt{[2-(-1)]^2 + [1-(-3)]^2} = 5.$$

Следовательно, $P = d_1 + d_2 + d_3 = 12$.

2. Доказать, что треугольник с вершинами $A(-4, -2)$, $B(4, 0)$, $C(1, 3)$ прямоугольный.

Зная длины сторон a, b, c треугольника, с помощью теоремы, обратной теореме Пифагора, можно установить, является ли данный треугольник прямоугольным $(a^2 + b^2 = c^2)$, остроугольным $(c^2 < a^2 + b^2)$ или тупоугольным $(c^2 > a^2 + b^2)$. Пользуясь формулой (1.8), находим длины сторон:

$$a = \rho(B, C) = \sqrt{(1-4)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{18},$$
$$b = \rho(A, C) = \sqrt{(1+4)^2 + (3+2)^2} = \sqrt{50},$$
$$c = \rho(A, B) = \sqrt{(4+4)^2 + (0+2)^2} = \sqrt{68}.$$

Поскольку $a^2 = 18$, $b^2 = 50$, $c^2 = 68$, то $a^2 + b^2 = c^2$. Следовательно, данный треугольник является прямоугольным.

3. Найти центр и радиус окружности, проходящей через точки $K(-3, 1)$, $L(0, 0)$, $M(5, 5)$.

Пусть $C(a, b)$ — центр окружности и R — ее радиус. Найдем неизвестные числа a, b и R. По определению окружности $\rho(C, K) = R$, $\rho(C, L) = R$, $\rho(C, M) = R$. Выражая расстояния между соответствующими точками по формуле (1.8), подставляя их в левые части последних трех равенств и возводя почленно в квадрат, получаем уравнения:

$$(a+3)^2 + (b-1)^2 = R^2,$$
$$a^2 + b^2 = R^2,$$
$$(a-5)^2 + (b-5)^2 = R^2.$$

Раскрывая скобки в первом и третьем уравнениях, используя второе уравнение, приведем их к следующему виду (после сокращения первого на 2, второго — на (-10)):

$$3a - b + 5 = 0, \quad a + b - 5 = 0.$$

Решив эти уравнения, найдем $a = 0$, $b = 5$; поэтому $R = 5$ (так как $a^2 + b^2 = R^2$).

1.30. Даны точки $A(4, 3)$, $B(0, 0)$, $C(-3, -4)$, $D(6, 8)$, $E(3, 4)$. Найти расстояния между точками: 1) A и B; 2) A и C; 3) A и D; 4) B и C; 5) B и D; 6) C и D; 7) D и E.

1.31. Вычислить площадь квадрата, две смежные вершины которого находятся в точках $A(5, 6)$, $B(9, 2)$.

1.32. Вычислить площадь квадрата, две противоположные вершины которого находятся в точках $A(-2, -1)$ и $C(3, 4)$.

1.33. Даны координаты двух вершин A и B равностороннего треугольника ABC. Как найти координаты третьей вершины? Найти C, если $A(0, 2)$, $B(2, 0)$.

1.34. Даны координаты двух смежных вершин A и B квадрата $ABCD$. Как найти координаты остальных вершин? Найти C и D, если $A(1, 2)$, $B(5, 6)$.

1.35. Вычислить площадь равностороннего треугольника, две вершины которого находятся в точках $A(-3, -5)$ и $B(5, 3)$.

1.36. Даны координаты двух противоположных вершин A и C квадрата $ABCD$. Как найти координаты остальных вершин? Найти B и D, если $A(-2, 3)$, $C(2, -1)$.

1.37. Вычислить периметр параллелограмма $ABCD$, если $A(-3, 1)$, $B(-3, 4)$, $C(1, 7)$.

1.38. Даны координаты трех вершин A, B, C ромба $ABCD$. Как найти координаты вершины D? Найти D, если $A(-3, -1)$, $B(-3, 4)$, $C(1, 7)$.

1.39. Вычислить площадь ромба $ABCD$, три вершины которого находятся в точках $A(1, 1)$, $B(1, 6)$, $C(5, 9)$.

1.40. Доказать, что треугольник с вершинами $A(4, 3)$, $B(8, 6)$, $C(5, 2)$ равнобедренный.

1.41. Доказать, что треугольник с вершинами $A(2, -1)$, $B(-3, 4)$, $C(5, 2)$ прямоугольный.

1.42. Выяснить, имеется ли тупой угол среди внутренних углов треугольника с вершинами $A(1, 3)$, $B(3, 0)$, $C(-4, 1)$.

1.43. Установить, является ли треугольник с вершинами $A(-2, -2)$, $B(2, 4)$, $C(4, 1)$ остроугольным, тупоугольным или прямоугольным.

1.44. Найти внутренние углы треугольника с вершинами $A(3, 2)$, $B(-2, 3)$, $C(1, 5)$.

1.45. На оси Ox найти точку, равноудаленную от начала координат и от точки $M(2, 4)$.

1.46. На оси Oy найти точку, расстояние которой до точки $M(3, 2)$ равнялось бы 5.

1.47. Даны две точки $A(2, 2)$, $B(5, -2)$. На оси Ox найти такую точку C, чтобы угол ACB был прямым.

1.48. Найти центр и радиус окружности, описанной около треугольника с вершинами $A(-8, -4)$, $B(-5, -5)$, $C(0, 0)$.

1.49. Найти точку, одинаково удаленную от осей координат и от точки $M(1, 8)$.

1.50. Дана окружность с центром в точке $C(1, 1)$ и радиусом $R = 5$. Из точки $A(2, 8)$ к этой окружности проведены касательные. Найти их длины.

1.51. Зная две противолежащие вершины ромба $A(-3, -1)$, $C(1, 7)$, найти две другие его вершины при условии, что длина стороны ромба равна 5.

1.52. Дан треугольник с вершинами $A(4, -2)$, $B(3, 4)$, $C(-4, -3)$. Найти точку M, симметричную вершине A относительно стороны BC.

1.4. Деление отрезка в данном отношении

Отношением, в котором точка M, лежащая на прямой, проходящей через точки M_1 и M_2, делит отрезок $\overline{M_1M_2}$, называют число λ, определяемое по формуле (1.3).

Если даны точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, то координаты точки $M(x, y)$, делящей отрезок $\overline{M_1M_2}$ в отношении λ, определяются формулами:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \qquad (1.9)$$

Если точка M является серединой отрезка $\overline{M_1M_2}$, ее координаты вычисляются по формулам:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \qquad (1.10)$$

Примеры. 1. Даны две смежные вершины $A(-1, 2)$, $B(1, 6)$ параллелограмма $ABCD$ и точка $N(3, 3)$ пересечения его диагоналей. Найти две другие вершины параллелограмма.

Поскольку диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам, точка N является серединой отрезка $\overline{AC}$ и отрезка $\overline{BD}$. Формулы (1.10) принимают вид:

$$x_N = \frac{x_A + x_C}{2}, \quad y_N = \frac{y_A + y_C}{2}, \quad x_N = \frac{x_B + x_D}{2}, \quad y_N = \frac{y_B + y_D}{2},$$

откуда

$$x_C = 2x_N - x_A, \quad y_C = 2y_N - y_A, \quad x_D = 2x_N - x_B, \quad y_D = 2y_N - y_B.$$

Подставив в последние формулы координаты точек A, B и N, получим $x_C = 7$, $y_C = 4$, $x_D = 5$, $y_D = 0$. Итак, другие две вершины находятся в точках $C(7, 4)$, $D(5, 0)$.

2. В треугольнике с вершинами $A(3, -1)$, $B(6, 3)$, $C(-5, 5)$ найти длину биссектрисы внутреннего угла A.

Обозначим через $D(x, y)$ точку, в которой указанная биссектриса пересекает сторону BC, через c и b длины сторон AB и AC. Из элементарной геометрии известно, что биссектриса внутреннего угла треугольника делит противолежащую сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам. Найдем длины этих сторон:

$$c = \rho(A, B) = \sqrt{(6-3)^2 + [3-(-1)]^2} = 5,$$
$$b = \rho(A, C) = \sqrt{(-5-3)^2 + [5-(-1)]^2} = 10.$$

Следовательно, точка D делит направленный отрезок $\overline{BC}$ в отношении

$$\lambda = \frac{c}{b} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

Считая точку B первой (т. е. имеющей координаты x_1, y_1), точку C второй, по формулам (1.9) находим координаты точки D:

$$x = \frac{6 + \frac{1}{2}(-5)}{1 + 1/2} = \frac{7}{3}, \quad y = \frac{3 + \frac{1}{2}\cdot 5}{1 + 1/2} = \frac{11}{3}; \quad D\left(\frac{7}{3}, \frac{11}{3}\right).$$

По формуле (1.8) вычислим длину биссектрисы AD:

$$\rho(A, D) = \sqrt{\left(\frac{7}{3} - 3\right)^2 + \left(\frac{11}{3} + 1\right)^2} = \frac{10}{3}\sqrt{2}.$$

1.53. Найти координаты середины отрезка $\overline{M_1M_2}$ в каждом из следующих случаев: 1) $M_1(3, -7)$, $M_2(5, 9)$; 2) $M_1(-5, -1)$, $M_2(-3, -1)$; 3) $M_1(2, 6)$, $M_2(-8, -12)$; 4) $M_1(4, 8)$, $M_2(-4, -10)$; 5) $M_1(1, -4)$, $M_2(-1, 4)$.

1.54. Дан треугольник с вершинами $A(-4, 2)$, $B(6, 8)$, $C(4, -10)$. Найти основания его медиан.

1.55. В треугольнике с вершинами $A(7, 5)$, $B(3, -2)$, $C(5, 4)$ найти длину медианы, проведенной из точки A.

1.56. Один из концов отрезка AB находится в точке $A(4, 5)$, его серединой является точка $C(-3, 7)$. Найти другой конец отрезка.

1.57. Пусть $A(6, -10)$, $B(-2, 4)$ — концы однородного стержня. Найти координаты его центра тяжести.

1.58. Центр тяжести однородного стержня находится в точке $C(-5, 3)$, один из его концов — в точке $A(-8, 5)$. Найти координаты другого конца стержня.

1.59. Даны две точки $A(1, 2)$, $B(3, -1)$. Найти точку M, симметричную точке A относительно B, и точку N, симметричную точке B относительно A.

1.60. Точки $P(0, 1)$, $Q(4, 2)$, $R(2, -3)$ являются серединами сторон треугольника ABC. Найти его вершины.

1.61. Даны середины $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$ сторон треугольника. Найти его вершины.

1.62. Даны три вершины $A(-3, -2)$, $B(-1, 3)$, $C(5, 4)$ параллелограмма $ABCD$. Найти четвертую вершину D и центр S.

1.63. Три вершины параллелограмма находятся в точках $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$. Найти координаты четвертой вершины D и центра S.

1.64. Отрезок, определяемый точками $M_1(-8, -9)$, $M_2(-3, -4)$, разделен на пять равных частей. Найти точки деления. До какой точки нужно продолжить отрезок $\overline{M_1M_2}$, чтобы его длина увеличилась в 4 раза?

1.65. Дан треугольник с вершинами $A(-7, 7)$, $B(3, 2)$, $C(-1, -1)$. Найти точки, в которых сторона AB (или ее продолжение) пересекается биссектрисами внутреннего и внешнего углов при вершине C.

1.66. Даны вершины треугольника $A(6, -6)$, $B(2, -3)$, $C(8, 5)$. Найти длину биссектрисы его внутреннего угла при вершине B.

1.67. Дан треугольник с вершинами $A(5, -4)$, $B(3, -2)$, $C(4, -1)$. Найти длину биссектрисы его внешнего угла при вершине B.

1.68. Найти координаты концов A и D отрезка, который точками $B(-2, 1)$, $C(1, 3)$ разделен на три равные части.

1.69. Даны три точки $A(-3, 4)$, $B(-1, 2)$, $C(5, -4)$, лежащие на одной прямой. Найти отношение λ, в котором каждая из них делит отрезок, ограниченный двумя другими точками.

1.70. Найти точку пересечения медиан треугольника с вершинами $A(-4, 3)$, $B(5, 6)$, $C(8, -3)$.

1.71. Доказать, что координаты точки пересечения медиан треугольника с вершинами $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ определяются формулами:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

1.72. Дан треугольник с вершинами $A(3, 5)$, $B(7, 9)$, $C(-4, -5)$. Вычислить расстояние между серединой стороны AB и точкой пересечения его медиан.

1.73. Даны два треугольника ABC и PQR с вершинами $A(-2, 4)$, $B(6, -8)$, $C(5, -2)$, $P(-3, 5)$, $Q(-7, 9)$, $R(-5, -2)$. Найти расстояние между точками пересечения их медиан.

1.74. В точке $A(3, 4)$ помещен груз массой 60 г, в точке $B(-2, -1)$ — груз массой 40 г. Найти координаты центра тяжести этой системы.

1.75. В вершинах треугольника $A(-1, 5)$, $B(1, 1)$, $C(2, -1)$ сосредоточены соответственно массы 50, 40, 60 г. Найти центр тяжести данной системы.

1.5. Площадь треугольника

Каковы бы ни были три точки $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, площадь S треугольника ABC вычисляется по формуле

$$\pm S = \frac{1}{2}\left[(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\right]. \qquad (1.11)$$

Правая часть формулы (1.11) равна $+S$ в случае, когда кратчайший поворот отрезка $\overline{AB}$ к отрезку $\overline{AC}$ положителен (рис. 1.7, *а*), и $-S$, когда указанный поворот отрицателен (1.7, *б*).

Знак «+» в формуле (1.11) берут в случае, когда выражение в квадратных скобках положительно, а знак «—»,— когда оно отрицательно.

Примеры. 1. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(-2, 2)$, $B(-1, 5)$, $C(4, 8)$.

Считая точку A первой, точку B второй и точку C третьей, т. е. $x_1 = -2$, $y_1 = 2$, $x_2 = -1$, $y_2 = 5$, $x_3 = 4$, $y_3 = 8$, по формуле (1.11) находим

$$-S = \frac{1}{2}\left[(-1 + 2)(8 - 2) - (4 + 2)(5 - 2)\right] = \frac{1}{2}(6 - 18) = -6, \; S = 6.$$

2. Дан треугольник с вершинами $A(1, -1)$, $B(-3, 11)$, $C(11, 5)$. Вычислить площадь треугольника, вершинами которого являются середины сторон данного треугольника.

Находим сначала середины сторон данного треугольника: $P(-1, 5)$, $Q(6, 2)$, $R(4, 8)$. По формуле (1.11) получаем

$$S = \frac{1}{2}\left[(6 + 1)(8 - 5) - (4 + 1)(2 - 5)\right] = \frac{1}{2}(21 + 15) = 18.$$

3. Даны две точки $A(4, 2)$, $B(6, -2)$. На оси Ox найти такую точку C, чтобы площадь треугольника ABC была равна 8 кв. ед.

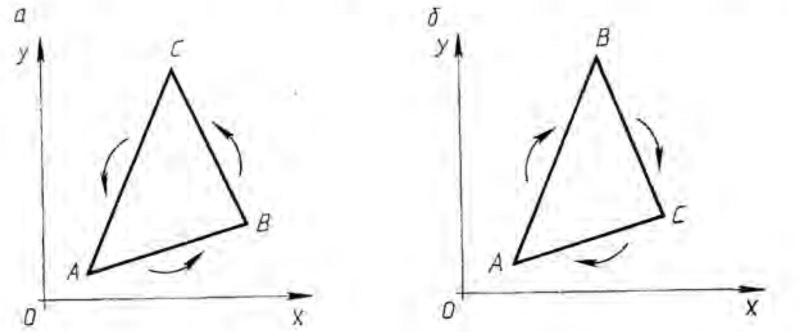


Рис. 1.7

Пусть $C(x, 0)$ — искомая точка ($y = 0$, так как точка лежит на оси Ox). В формулу (1.11) подставим значения: $S = 8$, $x_1 = 4$, $y_1 = 2$, $x_2 = 6$, $y_2 = -2$, $x_3 = x$, $y_3 = 0$, в результате чего получим

$$\pm 8 = \frac{1}{2}\left[(6 - 4)(0 - 2) - (x - 4)(-2 - 2)\right] = \frac{1}{2}\left[-4 + 4(x - 4)\right]$$

или $\pm 8 = 2x - 10$, откуда $x_1 = 1$, $x_2 = 9$.

Итак, условию задачи удовлетворяют координаты точек $C_1(1, 0)$, $C_2(9, 0)$.

1.76. Вычислить площадь треугольника ABC в каждом из следующих случаев: 1) $A(-2, 2)$, $B(6, 2)$, $C(4, 8)$; 2) $A(-1, 5)$, $B(4, 8)$, $C(6, 2)$; 3) $A(-3, 1)$, $B(-2, 4)$, $C(3, 7)$.

1.77. Вычислить длину высоты треугольника с вершинами $O(0, 0)$, $A(4, 1)$, $B(7, -2)$, опущенной из точки O.

1.78. Найти расстояние от точки $A(3, 7)$ до прямой, проходящей через точки $B(-2, 4)$ и $C(5, 1)$.

1.79. Вычислить площадь четырехугольника с вершинами $A(-3, 1)$, $B(-2, 4)$, $C(3, 7)$, $D(5, 1)$.

1.80. Вычислить площадь параллелограмма, три вершины которого находятся в точках $A(-3, 1)$, $B(-3, 4)$, $C(1, 7)$.

1.81. Найти площадь ромба, три вершины которого находятся в точках $A(1, 7)$, $B(1, 2)$, $C(-3, -1)$.

1.82. Даны две точки $A(3, 5)$, $B(6, -2)$. На оси Oy найти такую точку C, чтобы площадь треугольника ABC равнялась 15 кв. ед.

1.83. Найти центр тяжести однородной четырехугольной пластинки, вершины которой находятся в точках $A(-2, 2)$, $B(-1, 5)$, $C(4, 8)$, $D(6, 2)$.

1.84. Найти центр тяжести однородной пятиугольной пластинки с вершинами $A(3, 2)$, $B(1, 5)$, $C(0, 4)$, $D(1, 0)$, $E(2, 0)$.

1.85. Площадь треугольника $S = 3$, две его вершины находятся в точках $A(3, 1)$, $B(1, -3)$, центр тяжести лежит на оси Ox. Найти координаты третьей вершины C.

1.6. Уравнение линии в декартовых координатах

Уравнением линии относительно фиксированной системы координат называют уравнение с двумя переменными, которому удовлетворяют координаты любой точки этой линии и не удовлетворяют координаты ни одной точки, не лежащей на данной линии.

Уравнение линии в декартовых координатах в общем виде записывается так: $F(x, y) = 0$, где $F(x, y)$ означает некоторую зависимость между координатами x и y.

Координаты точек пересечения двух линий, заданных уравнениями $F(x, y) = 0$, $\Phi(x, y) = 0$, находятся из системы этих уравнений:

$$F(x, y) = 0,\ \Phi(x, y) = 0.$$

Примеры. 1. Составить уравнение окружности радиусом R с центром в точке $C(a, b)$.

Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка данной окружности. По определению окружности (как геометрического места точек, равноудаленных от данной точки) для любой ее точки имеем

$$\rho(M, C) = R. \qquad (1)$$

Выражая расстояние между точками M и C по формуле (1.8) и подставляя его в левую часть данного равенства, получаем уравнение

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R, \qquad (2)$$

которое можно записать так:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2. \qquad (3)$$

Если точка $N(x, y)$ не принадлежит окружности, то $\rho(N, C) < R$ (если N лежит в круге радиусом R с центром в точке C) или $\rho(N, C) > R$ (если N лежит вне указанного круга); следовательно, для координат точки N выполняется одно из неравенств:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 < R^2 \text{ или } (x-a)^2 + (y-b)^2 > R^2,$$

т. е. ее координаты не удовлетворяют уравнению (3).

Если координаты некоторой точки удовлетворяют уравнению (3), то они удовлетворяют уравнению (2) и равенству (1), т. е. точка лежит на окружности радиусом R с центром в точке $C(a, b)$.

Итак, уравнение (3) является уравнением окружности радиусом R с центром в точке $C(a, b)$.

2. Найти точки пересечения двух окружностей, заданных уравнениями $(x-5)^2 + (y-6)^2 = 25$, $(x+2)^2 + (y-6)^2 = 32$.

Чтобы найти точки пересечения данных окружностей, необходимо решить систему их уравнений. Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получаем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 - 10x - 12y + 36 = 0,\\ x^2 + y^2 + \ 4x - 12y + \ 8 = 0. \end{aligned}\right\}$$

Вычитая второе уравнение из первого, получаем $-14x + 28 = 0$, откуда $x = 2$. Второе уравнение системы при $x = 2$ сводится к квадратному уравнению относительно y: $y^2 - 12y + 20 = 0$.

Решив последнее уравнение, найдем $y_1 = 2$, $y_2 = 10$. Следовательно, данные окружности пересекаются в двух точках: $M_1(2, 2)$, $M_2(2, 10)$.

3. Составить уравнение геометрического места точек, для каждой из которых произведение расстояний до двух данных точек есть постоянная величина, равная b^2. (Эта линия называется *овалом Кассини.*)

Начало прямоугольной декартовой системы координат поместим в середине отрезка F_1F_2, концами которого являются данные точки F_1, F_2; длину этого отрезка обозначим через $2a$. В качестве положительного направления оси Ox возьмем направление отрезка $\overline{F_1F_2}$. При указанном выборе координатной системы координаты точек F_1 и F_2 будут соответственно равны: $x_1 = -a$, $y_1 = 0$, $x_2 = a$, $y_2 = 0$, т. е. $F_1(-a, 0)$, $F_2(a, 0)$.

Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка данной линии. Согласно условию задачи,

$$\rho(F_1, M)\rho(F_2, M) = b^2.$$

Подставив в это равенство выражения:

$$\rho(F_1, M) = \sqrt{(x+a)^2 + y^2},\ \rho(F_2, M) = \sqrt{(x-a)^2 + y^2},$$

получим искомое уравнение данного геометрического места точек

$$\sqrt{(x+a)^2 + y^2}\sqrt{(x-a)^2 + y^2} = b^2.$$

Упрощая это уравнение, находим

$$(x^2 + y^2)^2 + 2a^2(y^2 - x^2) = b^4 - a^4.$$

Замечание. В частном случае, когда $a = b$, т. е. когда произведение расстояний от точки M до точек F_1 и F_2 равно квадрату половины расстояния между точками F_1 и F_2, получаем линию, называемую *лемнискатой Бернулли*. Лемниската Бернулли определяется уравнением

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2).$$

1.86. Составить уравнение геометрического места точек, равноудаленных от двух данных точек $A(-1, 2)$, $B(7, 5)$. Принадлежат ли этому геометрическому месту точки $C(2, 1)$, $D(5, -6)$?

1.87. В каких точках пересекает координатные оси перпендикуляр к отрезку, ограниченному точками $A(-2, 4)$, $B(6, 8)$, проходящий через его середину?

1.88. Найти точку пересечения двух линий, первая из которых является геометрическим местом точек, равноудаленных от начала координат и точки $A(2, 6)$, а вторая — геометрическим местом точек, равноудаленных от $B(-1, 5)$ и $C(7, 9)$.

1.89. Составить уравнение геометрического места точек, удаленных от начала координат на 5 единиц. Лежат ли на этой линии точки $A(1, 6)$, $B(-2, -3)$, $C(3, 4)$, $D(7, 1)$, $E(-4, 3)$?

1.90. Составить уравнение геометрического места точек, удаленных от точки $M(3, -2)$ на 10 единиц. Лежат ли на этой линии точки $A(2, 5)$, $B(6, 8)$, $C(-5, 4)$?

1.91. Найти точки пересечения двух окружностей: $x^2 + y^2 = 25$, $(x-8)^2 + y^2 = 25$.

1.92. Найти точки пересечения окружности $x^2 + y^2 = 49$ с координатными осями.

1.93. Найти траекторию точки M, которая движется так, что ее расстояние от точки $P(6, 0)$ в четыре раза больше расстояния от точки $Q(3/8, 0)$.

1.94. Найти траекторию точки M, которая движется так, что ее расстояние от точки $P(4, 0)$ вдвое меньше расстояния от точки $Q(16, 0)$.

1.95. Найти точки пересечения линий: $x^2 + y^2 = 25$, $x + 7y - 25 = 0$.

1.96. Составить уравнение геометрического места точек, равноудаленных от точек пересечения линий: $x^2 + y^2 = 25$, $4x - 3y = 0$.

В задачах 1.97—1.99 найти точки пересечения линии и прямой.

1.97. $4x^2 - 4xy + y^2 - 4x - 8y + 20 = 0$, $y = 2$.

1.98. $11x^2 - 16xy - y^2 - 26x + 22y + 10 = 0$, $x = 1$.

1.99. $x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 8y + 16 = 0$, $y + 5x + 4 = 0$.

В задачах 1.100, 1.101 найти расстояние между точками пересечения указанных линий.

1.100. $x^2 + 4xy + y^2 - 8x + 2y - 9 = 0$, $x - y + 1 = 0$.

1.101. $x^2 - 8xy + y^2 + 4x - 6y + 8 = 0$, $3x + y - 4 = 0$.

1.7. Уравнение линии в полярных координатах

Уравнение линии относительно полярной системы координат в общем виде записывается так: $F(\rho, \varphi) = 0$, где $F(\rho, \varphi)$ — некоторая зависимость между полярными координатами ρ и φ точек этой линии.

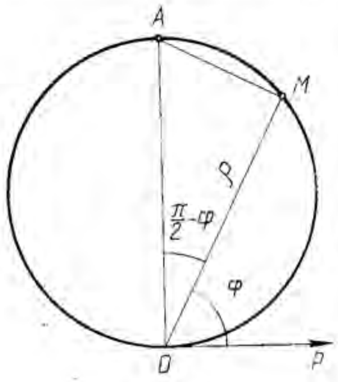


Рис. 1.8

Примеры. 1. Составить уравнение окружности радиусом a, касающейся полярной оси в полюсе (рис. 1.8), центр которой расположен выше полярной оси.

Пусть $M(\rho, \varphi)$ — произвольная точка окружности, OA — диаметр окружности, равный $2a$. Так как в треугольнике OAM угол при вершине M прямой, угол при вершине O равен $\pi/2 - \varphi$, то

$$2a \cos(\pi/2 - \varphi) = \rho \text{ или } \rho = 2a \sin \varphi.$$

Полученное уравнение является искомым, поскольку ему удовлетворяют координаты любой точки данной окружности и не удовлетворяют координаты ни одной точки, не лежащей на этой окружности.

2. Записать в полярных координатах уравнение овала Кассини. Построить овалы Кассини при различных соотношениях между параметрами a и b.

В прямоугольной декартовой системе координат уравнение овала Кассини (см. § 1.6, пример 3) имеет вид

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = b^4 - a^4.$$

Подставив в это уравнение выражения $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, получим

$$\rho = \pm a \sqrt{\cos 2\varphi \pm \sqrt{\cos^2 2\varphi + \left(\frac{b^4}{a^4} - 1\right)}}.$$

Построение овалов Кассини можно осуществить следующим образом. Зная параметры a и b, находим положение фокусов F_1 и F_2 и вершин A_1 и A_2 (рис. 1.9). Проводим из точки A_2 луч, который пересечет окружность, описанную вокруг начала координат радиусом, равным c, в точках N_2 и N_1. Если теперь из фокусов F_2 и F_1 описать окружности радиусами, равными соответственно длинам отрезков A_2N_2, A_2N_1, то точки M_1 и M_2 их пересечения будут принадлежать овалу. В самом деле, $\rho(M, F_1)\rho(M, F_2) = \rho(A_2, N_1)\rho(A_2, N_2) = \text{const}$ (по теореме о произведении секущей на ее внешнюю часть). Меняя направление луча $A_2N_2N_1$, можно построить сколько угодно точек овала.

На рис. 1.10 изображены овалы Кассини при различных соотношениях между a и b. Если $b < a$, овал состоит из двух отдельных линий. При $b = a$ получаем *лемнискату Бернулли*. Если $b > a$, получаем замкнутую линию, симметричную относительно координатных осей.

1.102. Прямая перпендикулярна к полярной оси и отсекает на ней отрезок, равный 5. Составить уравнение этой прямой в полярных координатах.

1.103. Луч выходит из полюса и наклонен к полярной оси под углом $\pi/6$. Составить уравнение этого луча в полярных координатах.

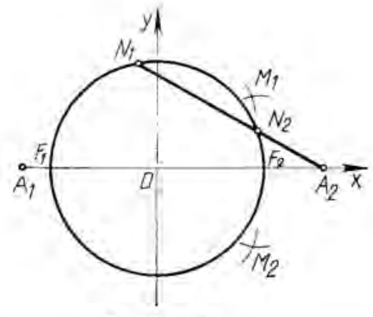


Рис. 1.9

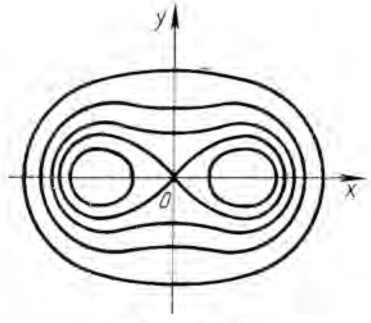


Рис. 1.10

1.104. Прямая проходит через полюс и наклонена к полярной оси под углом $3\pi/4$. Составить уравнение этой прямой в полярных координатах.

1.105. В полярных координатах составить уравнение геометрического места точек, расстояния от которых до полярной оси равны 3.

1.106. Окружность радиусом $R = a$ проходит через полюс, ее центр лежит на полярной оси. Составить уравнение этой окружности в полярной системе координат.

1.107. Окружность радиусом $R = 5$ касается полярной оси в полюсе. Составить уравнение этой окружности в полярной системе координат.

1.108. В полярной системе координат составить уравнение окружности радиусом R с центром в точке $C(\rho_0, \varphi_0)$.

1.109. Дана точка A и прямая l, причем $a = \rho(A, C)$, где C — основание перпендикуляра, проведенного из точки A на эту прямую. Вокруг точки A вращается луч, пересекающий данную прямую в точке B. По разные стороны от точки B на луче откладываются два отрезка BM_1 и BM, длины которых равны расстоянию между точками B и C. Составить уравнение геометрического места точек M и M_1. Построить линию, использовав ее определение. (Эта линия называется *строфоидой*.)

1.110. Построить линии, заданные уравнениями в полярных координатах: 1) $\rho = 3$; 2) $\varphi = \frac{\pi}{4}$; 3) $\rho = \frac{5}{\cos \varphi}$; 4) $\rho = \frac{-4}{\sin \varphi}$.

1.111. Записать в полярных координатах уравнения линий:
1) $x^2+y^2=R^2$; 2) $x-y=0$; 3) $x+y=0$; 4) $x^2-y^2=R^2$; 5) $(x^2+y^2)^3-4a^2x^2y^2=0$; 6) $(x^2+y^2)^2=a(3x^2y-y^3)$.

1.112. Записать в декартовых координатах уравнения линий:
1) $\rho\cos\varphi=a$; 2) $\rho=2a\cos\varphi$; 3) $\rho=\dfrac{a(1\pm\sin\varphi)}{\cos\varphi}$; 4) $\rho=a\operatorname{ctg}\varphi$;
5) $\rho=\dfrac{2a}{1+\cos\varphi}$; 6) $\rho=\dfrac{2a}{\sin 2\varphi}$; 7) $\rho=2a(1-\cos\varphi)$.

1.113. Из точки O на окружности радиусом a проводится луч, от точки L пересечения его с окружностью откладывается отрезок $LM=b$ по направлению луча OK. Составить уравнение линии, описываемой точкой M при вращении луча вокруг точки O, и построить линию. (Эта линия называется *улиткой Паскаля.*)

1.114. Отрезок постоянной длины $2a$ своими концами A и B скользит по осям прямоугольной декартовой системы координат. Из начала координат к отрезку AB проводится перпендикуляр OM. Составить уравнение геометрического места точек M и построить линию. (Эта линия называется *четырехлепестковой розой.*)

1.115. Луч l, исходящий из неподвижной точки O, вращается с постоянной угловой скоростью ω. Точка M движется по лучу l из точки O равномерно со скоростью v. Составить уравнение траектории точки M, построить линию. (Эта линия называется *спиралью Архимеда.*)

В задачах 1.116—1.118 построить линию, определяемую в полярной системе координат заданным уравнением.

1.116. $\rho=e^{\varphi}$ (*логарифмическая спираль*).

1.117. $\rho=a/\varphi$ (*гиперболическая спираль*).

1.118. $\rho=a\sin 3\varphi$ (*трехлепестковая роза*).

1.8. Параметрические уравнения линии

Уравнения вида

$$x=f(t),\ y=\varphi(t) \qquad (1.12)$$

называют *параметрическими уравнениями линии,* если при изменении параметра t в некотором промежутке формулы (1.12) дают координаты всех точек данной линии, и только таких точек.

Примеры. 1. Составить параметрические уравнения окружности радиусом R с центром в точке $C(a,b)$.

Пусть $M(x,y)$ — произвольная точка данной окружности (рис. 1.11). Обозначим через P и Q основания перпендикуляров, проведенных из точки M соответственно к осям Ox и Oy, через L и N — точки пересечения прямых, проходящих через точку C и параллельных соответственно осям Ox и Oy, с указанными перпендикулярами.

Угол, образуемый отрезком CM с положительным направлением оси Ox, обозначим через t, т. е. $\angle MCL=t$. Поскольку $CL=R\cos t$, $LM=R\sin t$, а, с другой стороны, $CL=C_1P=x-a$, $LM=C_2Q=y-b$, то $x-a=R\cos t$, $y-b=R\sin t$.

Таким образом, получены параметрические уравнения данной окружности:

$$x=a+R\cos t,\ y=b+R\sin t.$$

2. Прямоугольник, две стороны которого лежат на двух взаимно перпендикулярных прямых, деформируется так, что его диагональ сохраняет постоянную длину. Множество точек — оснований перпендикуляров, проведенных из вер-

шины прямоугольника к его диагонали,— называют *астроидой.* Составить параметрические уравнения астроиды.

В качестве координатных осей выберем указанные взаимно перпендикулярные прямые, на которых находятся стороны прямоугольника $OABC$ (рис. 1.12). Длину диагонали AC обозначим буквой a: $|AC|=a$. Этот прямоугольник деформируется, длины сторон OA и OC изменяются так, что $|OA|^2+|OC|^2=a^2$. Из вершины B, противоположной началу координат, проведем перпендикуляр к диагонали AC. Пусть $M(x,y)$ — основание этого перпендикуляра. Обозначим буквой t величину угла BCA и равного ему угла MBA. Выразим координаты x, y точки M через угол t:

$$x=OP=|CM|\cos t=(|CB|\cos t)\cos t=|CB|\cos^2 t=$$
$$=(|CA|\cos t)\cos^2 t=|CA|\cos^3 t=a\cos^3 t,$$
$$y=OQ=PM=|MA|\sin t=(|AB|\sin t)\sin t=|AB|\sin^2 t=$$
$$=(|AC|\sin t)\sin^2 t=|AC|\sin^3 t=a\sin^3 t.$$

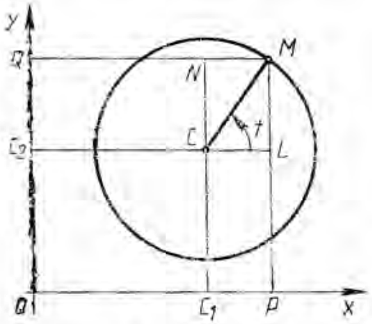


Рис. 1.11

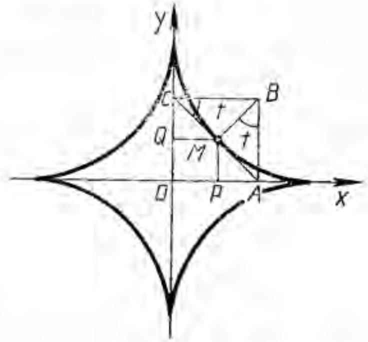


Рис. 1.12

Таким образом, найдены следующие параметрические уравнения астроиды:

$$x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t.$$

Исключив отсюда параметр t, получим уравнение астроиды в прямоугольных декартовых координатах: $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.

В задачах 1.119—1.126 построить линию, заданную параметрическими уравнениями.

1.119. $x=t,\ y=-t$.

1.120. $x=1-t,\ y=1+t$.

1.121. $x=3\cos t-1,\ y=3\sin t+2$.

1.122. $x=4\cos t+3,\ y=4\sin t-5$.

1.123. $x=t,\ y=t^2$.

1.124. $x=2-t,\ y=(t-1)^2+1$.

1.125. $x=t,\ y=\dfrac{6}{t}$. **1.126.** $x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\ y=\dfrac{2t}{1+t^2}$.

В задачах 1.127—1.134 записать в декартовых координатах уравнение линии, заданной параметрическими уравнениями.

1.127. $x=a\cos t,\ y=b\sin t$.

1.128. $x=a(t+1/t),\ y=b(t-1/t)$.

1.129. $x=2\sin t+1,\ y=2\cos t-3$.

1.130. $x=5\sin t-4,\ y=5\cos t+6$.

1.131. $x = t + 1$, $y = (t-2)^2 + 3$.
1.132. $x = (t+1)^2 - 2$, $y = 1 - t$.
1.133. $x = t - 1$, $y = \frac{4}{t+2}$. **1.134.** $x = \frac{1}{t+3}$, $y = 2t - 5$.

1.135. Даны окружность $x^2 + y^2 = a^2$ и эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Прямая, параллельная оси Oy, пересекает каждую из линий в двух точках. Пусть M_1 и M_2 — две точки пересечения с данными линиями, лежащие в одной четверти, а M — середина отрезка M_1M_2. Записать параметрические уравнения линии, описываемой точкой M при движении прямой, остающейся параллельной оси Oy.

1.136. Даны окружность $x^2 + y^2 = a^2$ и эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Луч, исходящий из точки O (центр окружности и эллипса), пересекает эллипс в точке M_1, а окружность — в точке M_2. Составить параметрические уравнения линии, описываемой точкой M — серединой отрезка M_1M_2 — при вращении луча вокруг точки O.

2. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ЛИНИИ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКА

Алгебраической линией (кривой) n-го порядка называют линию, определяемую алгебраическим уравнением n-й степени относительно декартовых координат.

Линии первого порядка определяются уравнением

$$Ax + By + C = 0 \quad (A^2 + B^2 \neq 0),$$

а линии второго порядка — уравнением

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0).$$

Линии первого порядка являются прямыми. К линиям второго порядка относятся окружность, эллипс, гипербола, парабола.

2.1. Прямая линия на плоскости

Угловым коэффициентом прямой называют тангенс угла α наклона ее к положительной полуоси Ox прямоугольной декартовой системы координат:

$$k = \operatorname{tg} \alpha \quad (0 \leqslant \alpha < \pi).$$

Уравнение прямой с угловым коэффициентом имеет вид

$$y = kx + b, \tag{2.1}$$

где k — угловой коэффициент; $b = OB$ — величина направленного отрезка $\overline{OB}$, отсекаемого на оси Oy.

Тангенс угла между двумя прямыми

$$y = k_1x + b_1, \quad y = k_2x + b_2 \tag{2.2}$$

вычисляется по формуле

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}. \tag{2.3}$$

Необходимое и достаточное условие параллельности прямых, заданных уравнениями вида (2.2), выражается равенством $k_1 = k_2$, а условие их перпендикулярности

$$k_1 = -\frac{1}{k_2}. \tag{2.4}$$

Уравнение прямой, имеющей угловой коэффициент k и проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0)$:

$$y - y_0 = k(x - x_0). \tag{2.5}$$

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (x_2 \neq x_1,\ y_2 \neq y_1). \tag{2.6}$$

Параметрические уравнения прямой, проходящей через эти точки:

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)t, \quad y = y_1 + (y_2 - y_1)t,$$

где t принимает все действительные значения.

Уравнением прямой в отрезках называют уравнение

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

где $a = OA$, $b = OB$ — величины направленных отрезков, отсекаемых соответственно на оси Ox и оси Oy.

Общим уравнением прямой называют уравнение

$$Ax + By + C = 0, \tag{2.7}$$

в котором A и B одновременно в нуль не обращаются, т. е. $A^2 + B^2 \neq 0$.

Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой (2.7) вычисляют по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{2.8}$$

Примеры. 1. Даны уравнения основания равнобедренного треугольника $x + y + 1 = 0$ и боковой стороны $x - 2y - 3 = 0$. Составить уравнение третьей стороны треугольника, если известно, что на ней лежит точка $P(-3, -1)$.

Разрешим уравнения данных сторон относительно y:

$$y = -x - 1, \quad y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}.$$

Сравнивая эти уравнения с уравнением (2.1), заключаем, что данные прямые имеют следующие угловые коэффициенты: $k_1 = -1$, $k_2 = 1/2$. По формуле (2.3) находим тангенс угла между ними:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1/2 + 1}{1 - 1/2} = 3. \tag{1}$$

Уравнение третьей стороны ищем в виде $y = kx + b$. По условию эта сторона образует с основанием тот же угол, что и данная сторона $x - 2y - 3 = 0$, поэтому

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k + 1}{1 - k} \text{ или } \operatorname{tg} \varphi = \frac{-1 - k}{1 - k} \tag{2}$$

(в зависимости от того, какую из двух рассматриваемых прямых считать первой).

Следовательно, из равенств (1) и (2) получаем два уравнения:

$$\frac{k + 1}{1 - k} = 3, \quad \frac{-1 - k}{1 - k} = 3,$$

откуда соответственно находим $k = 1/2$, $k = 2$. Берем второе значение k ($k = 2$), так как первое относится к данной боковой стороне. Уравнение искомой стороны принимает вид $y = 2x + b$. Значение b определим из условия, что прямая проходит через точку $P(-3, -1)$. Подставляя координаты точки P в уравнение $y = 2x + b$, находим $-1 = 2(-3) + b$, $b = 5$.

Итак, получено искомое уравнение $y = 2x + 5$ или $2x - y + 5 = 0$.

2. Составить уравнения прямых, на которых лежат стороны и высоты треугольника с вершинами $A(3, 4)$, $B(6, 2)$, $C(3, 1/2)$.

Найдем уравнение прямой, на которой лежит сторона AB. Используем уравнение (2.6), полагая $x_1 = 3$, $y_1 = 4$, $x_2 = 6$, $y_2 = 2$:

$$\frac{y-4}{2-4} = \frac{x-3}{6-3}, \quad \frac{y-4}{-2} = \frac{x-3}{3}, \quad 2x + 3y - 18 = 0.$$

Составляя уравнение прямой, на которой лежит сторона BC, считаем $x_1 = 6$, $y_1 = 2$, $x_2 = 3$, $y_2 = 1/2$:

$$\frac{y-2}{1/2-2} = \frac{x-6}{3-6}, \quad \frac{y-2}{-3/2} = \frac{x-6}{-3}, \quad x - 2y - 2 = 0.$$

При составлении уравнения прямой, на которой лежит сторона AC, считаем $x_1 = 3$, $y_1 = 4$, $x_2 = 3$, $y_2 = 1/2$:

$$\frac{y-4}{1/2-4} = \frac{x-3}{3-3}. \qquad (1)$$

Второй знаменатель обращается в нуль, поэтому уравнение (2.6) теряет смысл. В этом случае уравнение прямой можно получить из геометрических соображений. Так как $x_1 = x_2 = 3$, то точки M_1 и M_2 расположены на прямой, параллельной оси Oy и отсекающей на оси Ox отрезок $a = 3$; ее уравнение $x = 3$.

При составлении уравнений прямых, на которых лежат высоты треугольника, пользуемся формулой (2.5) и условием перпендикулярности двух прямых (2.4).

Поскольку прямая AB имеет угловой коэффициент $k_{AB} = -2/3$, то высота, проведенная из точки C, имеет угловой коэффициент $k = 3/2$. В соответствии с уравнением (2.5) находим

$$y - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}(x - 3) \text{ или } 3x - 2y - 8 = 0.$$

Аналогично получаем уравнение прямой, на которой лежит высота треугольника, проведенная из точки A:

$$y - 4 = -2(x - 3) \text{ или } 2x + y - 10 = 0.$$

Так как прямая AC параллельна оси Oy, то высота, проведенная из точки B на AC, параллельна оси Ox; ее уравнение $y = 2$.

3. Вычислить высоту трапеции, основания которой лежат на прямых $3x + 4y - 10 = 0$, $6x + 8y - 45 = 0$.

Высота трапеции равна расстоянию между указанными прямыми, а это последнее — расстоянию от произвольной точки одной из них до другой. Выберем какую-нибудь точку первой прямой. Положив, например, $x = 0$, из уравнения $3x + 4y - 10 = 0$ найдем $y = 5/2$; получим точку $M_0(0, 5/2)$.

По формуле (2.8) вычисляем расстояние от точки $M_0(0, 5/2)$ до этой прямой:

$$d = \frac{\left|6\cdot 0 + 8\cdot\frac{5}{2} - 45\right|}{10} = \frac{|20-45|}{10} = 2{,}5.$$

Следовательно, искомая длина высоты трапеции равна 2,5.

2.1. Составить уравнения прямых, параллельных биссектрисе первого координатного угла и отсекающих на оси Oy отрезки, величины которых соответственно $b_1 = 2$, $b_2 = -5$.

2.2. Записать уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку $C(4, 3)$.

2.3. Записать уравнения прямых, отсекающих на оси Oy отрезок $b = -3$ и образующих с осью Ox соответственно углы: $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 45°$, $\varphi_3 = 60°$, $\varphi_4 = 135°$.

2.4. Записать уравнения прямых, проходящих через начало координат и образующих с осью Ox соответственно углы: $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 30°$, $\varphi_3 = 45°$, $\varphi_4 = 90°$, $\varphi_5 = 135°$.

2.5. Уравнения прямых $5x + y - 3 = 0$, $3x - 6y + 7 = 0$, $4x - 9y = 0$, $2y + 3 = 0$ привести к уравнениям с угловыми коэффициентами.

2.6. Найти углы, образуемые с осью Ox следующими прямыми:

1) $2x - 2y + 5 = 0$; 2) $3x + 3y - 7 = 0$; 3) $6x - 3y - 1 = 0$;
4) $7x + 10 = 0$; 5) $3y + 7 = 0$; 6) $15x + 5y - 14 = 0$.

2.7. Построить прямые, заданные уравнениями:

1) $y = 4x + 3$; 2) $y = -3x + 2$; 3) $4x + 5y - 20 = 0$;
4) $3x - 4y + 12 = 0$; 5) $3x - 8 = 0$; 6) $2x + 3 = 0$.

2.8. Найти величины отрезков, отсекаемых на осях координат следующими прямыми:

1) $2x - 3y - 6 = 0$; 2) $3x + 4y - 12 = 0$; 3) $4x - 5y + 20 = 0$.

2.9. Записать уравнение прямой, отсекающей на осях координат отрезки $a = 4\frac{1}{3}$, $b = -3\frac{1}{2}$.

2.10. Вычислить площадь треугольника, заключенного между осями координат и прямой $4x + 5y - 20 = 0$.

2.11. Диагонали ромба, равные 14 и 18 единицам, приняты за оси координат. Составить уравнения сторон ромба.

2.12. При каком значении C прямая $3x - 4y + C = 0$ отсекает на оси Oy отрезок $b = 5$?

2.13. Найти значения А, при которых прямая $Ax + 2y - 4 = 0$ образует с осью Ox соответственно углы: $\varphi_1 = 45°$, $\varphi_2 = 135°$.

2.14. При каких значениях B прямая $3x + By - 15 = 0$ отсекает на координатных осях отрезки равной длины?

2.15. Найти значение параметра b, при котором прямая $y = 3x + b$ отсекает на оси Ox отрезок $a = 2$.

2.16. Определить положение точек $A(1, 1)$, $B(4, -1)$, $C(1, 2)$, $D(2, 1)$, $E(1, -1)$, $F(2, -1)$ относительно прямой $2x + 3y - 5 = 0$.

2.17. Найти углы между прямыми:

1) $y = \frac{4}{3}x - 2$, $y = \frac{1}{7}x + 3$; 2) $y = \frac{3}{5}x + 1$, $y = 4x - 5$;
3) $y = \frac{1}{2}x + 6$, $x - 2y - 6 = 0$; 4) $y = \frac{4}{7}x - 2{,}7x + 4y - 10 = 0$.

2.18. Указать, какие из следующих прямых параллельны и перпендикулярны:

1) $2x - 7y + 3 = 0$; 2) $4x - 14y + 1 = 0$;
3) $7x + 2y - 5 = 0$; 4) $3x + 5y - 2 = 0$.

2.19. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и параллельной прямой $3x - 10y + 9 = 0$.

2.20. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и перпендикулярной к прямой $5x + 13y - 11 = 0$.

2.21. Через точку $M(3, -4)$ провести прямую, параллельную прямой $2x - 5y + 7 = 0$.

2.22. Через точку $M(-2, 5)$ провести прямую, перпендикулярную к прямой $4x + 7y - 3 = 0$.

2.23. Найти уравнение прямой, проходящей через начало координат и образующей угол $\varphi = 45°$ с прямой $3x - 8y + 4 = 0$.

2.24. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M(2, -1)$ и образующей угол $\varphi = 135°$ с прямой $7x - 2y + 5 = 0$.

2.25. Составить уравнения двух перпендикуляров к прямой $3x + 4y - 12 = 0$, проведенных из точек пересечения ее с осями координат.

2.26. Через точку пересечения прямых $2x - 3y - 5 = 0$, $3x - 4y - 7 = 0$ провести прямую, перпендикулярную к прямой $5x + 6y - 2 = 0$.

2.27. Через точку пересечения прямых $5x + 2y - 12 = 0$, $6x - 7y - 5 = 0$ провести прямую, параллельную прямой $7x - 8y + 2 = 0$.

2.28. Через точку пересечения прямых $9x - 2y - 5 = 0$, $8x + 3y - 14 = 0$ провести прямую, образующую угол $\varphi = 45°$ с прямой $3x - 7y + 5 = 0$.

2.29. Найти проекцию точки $Q(5, -1/2)$ на прямую $3x - 4y + 8 = 0$.

2.30. Найти точку, симметричную точке $N(4, 5)$ относительно прямой $8x + 6y - 37 = 0$.

2.31. Составить уравнения сторон треугольника с вершинами $A(-2, -2)$, $B(-1, 2)$, $C(6, 2)$.

2.32. Записать уравнения сторон трапеции с вершинами $A(-2, -2)$, $B(-1, 2)$, $C(3, 4)$, $D(6, 2)$.

2.33. Составить уравнения прямых, на которых лежат медианы треугольника с вершинами $A(2, -4)$, $B(-6, 8)$, $C(4, 6)$.

2.34. Найти точку пересечения медиан треугольника с вершинами $A(2, -8)$, $B(-3, 9)$, $C(7, -10)$.

2.35. Записать уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $5x - 7y - 3 = 0$, $3x + y - 7 = 0$ и перпендикулярной к прямой $8x + 3y - 5 = 0$.

2.36. Стороны трапеции лежат на прямых, заданных уравнениями: $4x - y + 6 = 0$, $x - 2y + 5 = 0$, $2x + 3y - 18 = 0$, $x - 2y - 2 = 0$. Найти точку пересечения ее диагоналей.

2.37. Вычислить расстояние данной точки M до указанной прямой в каждом из следующих случаев:

1) $4x - 3y - 15 = 0$, $M(2, -1)$; 2) $6x + 8y - 21 = 0$, $M(3, 1)$;
3) $x + 2y + 3 = 0$, $M(0, 0)$; 4) $5x - 12y - 26 = 0$, $M(8, -1)$.

2.38. Найти расстояния от прямой $3x + 4y - 20 = 0$ до следующих точек: $A(2, 1)$, $B(1, 3)$, $C(0, 5)$, $D(-2, 4)$.

2.39. Найти расстояния от прямой $8x - 6y - 15 = 0$ до следующих точек: $A(4, -2)$, $B(6, 8)$, $C(9, 2)$, $D(0; -2{,}5)$.

2.40. Вычислить расстояние между двумя прямыми $12x + 5y - 39 = 0$, $12x + 5y - 65 = 0$.

2.41. Вычислить длину перпендикуляра, проведенного из точки $M(6, 2)$ к прямой $4x + 3y - 10 = 0$.

2.42. Вершины треугольника находятся в точках $A(2, -1)$, $B(-1, -2)$ и $C(3, 1)$. Найти длину высоты, проведенной из точки A.

2.43. Вычислить площадь квадрата, две противоположные стороны которого лежат на прямых $6x - 8y - 15 = 0$, $6x - 8y + 15 = 0$.

2.44. Одна из сторон квадрата лежит на прямой $x + y - 3 = 0$, а центр его находится в точке $N(4, 3)$. Составить уравнения прямых, на которых лежат три другие стороны.

2.45. Составить уравнение прямой, параллельной прямой $3x - 4y - 35 = 0$ и отстоящей от нее на расстоянии $d = 2$.

2.2. Окружность

Каноническим уравнением окружности радиусом R с центром в точке $C(a, b)$ называют уравнение

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2. \tag{2.9}$$

В случае, когда центр окружности находится в начале координат, уравнение принимает вид

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Если уравнение второй степени, не содержащее члена с произведением координат и имеющее равные коэффициенты при x^2 и y^2, т. е. уравнение

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

определяет некоторую линию, то этой линией является окружность.

Примеры. 1. Найти координаты центра и радиус окружности, определяемой уравнением $2x^2 + 2y^2 - 10x + 6y - 1 = 0$.

Разделив обе части уравнения на 2, получим

$$x^2 + y^2 - 5x + 3y - 1/2 = 0.$$

Выделяя полные квадраты, находим

$$\left(x^2 - 5x + \frac{25}{4}\right) + \left(y^2 + 3y + \frac{9}{4}\right) - \frac{25}{4} - \frac{9}{4} - \frac{1}{2} = 0$$

или

$$(x - 5/2)^2 + (y + 3/2)^2 = 9.$$

Сравнивая полученное уравнение с уравнением (2.9), заключаем, что $a = 5/2$, $b = -3/2$, $R = 3$.

2. Какое геометрическое место точек определяет уравнение

$$5x^2 + 5y^2 - 10x + 20y + 31 = 0?$$

Разделив обе части уравнения на 5 и выделив полные квадраты, получим

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = -6/5.$$

Этому уравнению не удовлетворяют координаты ни одной точки плоскости; данное уравнение не определяет действительной линии.

3. Составить уравнение окружности, касающейся биссектрис координатных углов и проходящей через точку $A(2, 6)$.

Центр окружности, касающейся биссектрис координатных углов, лежит или на оси Ox, или на оси Oy, в зависимости от того, каково соотношение между координатами точки $A(x_0, y_0)$, через которую проходит окружность ($x_0 > y_0$ или $x_0 < y_0$).

Так как в данном случае $x_0 = 2$, $y_0 = 6$, т. е. $x_0 < y_0$, то центр окружности лежит на оси Oy и ее уравнение можно записать в виде

$$x^2 + (y - b)^2 = R^2,$$

где b — ордината центра $C(0, b)$ окружности.

Определим зависимость между b и R, для чего вычислим расстояние от точки $C(0, b)$ до биссектрисы $x - y = 0$. По формуле (2.8) находим

$$\frac{|0-b|}{\sqrt{2}} = R, \quad R = \frac{|b|}{\sqrt{2}}.$$

Искомое уравнение принимает вид

$$x^2 + (y - b)^2 = b^2/2.$$

Поскольку окружность проходит через точку $A(2, 6)$, то ее координаты должны удовлетворять этому уравнению:

$$2^2 + (6 - b)^2 = \frac{b^2}{2}, \quad 4 + 36 - 12b + b^2 = \frac{b^2}{2}, \quad \frac{b^2}{2} - 12b + 40 = 0.$$

Решая последнее уравнение, находим $b_1 = 4$, $b_2 = 20$.

Следовательно, условию задачи удовлетворяют две окружности, уравнения которых:

$$x^2 + (y - 4)^2 = 8, \quad x^2 + (y - 20)^2 = 200.$$

2.46. Записать уравнение окружности радиусом $R = 7$ с центром в точке $C(-3, 5)$.

2.47. Записать уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок MN, где $M(2, -3)$, $N(-6, 3)$.

2.48. Найти координаты центра и радиус окружности:

1) $x^2+y^2+6x-8y-11=0$; 2) $4x^2+4y^2-8x+12y-3=0$;
3) $x^2+y^2-6x-7=0$; 4) $3x^2+3y^2-16y=0$.

2.49. Какое геометрическое место точек определяет каждое из уравнений:

1) $x^2+y^2-4x+6y+13=0$; 2) $x^2+y^2+2x-4y+5=0$;
3) $2x^2+2y^2+4x-8y+21=0$; 4) $6x^2+6y^2-12x+24y+33=0$?

2.50. Составить уравнение окружности, касающейся осей координат и проходящей через точку $M(1, 2)$.

2.51. Составить уравнение окружности, касающейся оси Ox и проходящей через две точки $M(-2, 1)$ и $N(6, 5)$.

2.52. Составить уравнение окружности, касающейся оси Oy и проходящей через две точки $M(1, 6)$ и $N(5, -2)$.

2.53. Составить уравнение окружности, проходящей через три точки $P(-2, -2)$, $Q(6, 2)$, $R(4, 6)$.

2.54. Составить уравнение окружности, касающейся прямой $3x + 4y - 15 = 0$ и имеющей центр в точке $C(5, 5)$.

2.55. Какая линия определяется каждым из следующих уравнений:

1) $y = +\sqrt{16 - x^2}$; 2) $y = -\sqrt{36 - x^2}$;
3) $x = +\sqrt{49 - y^2}$; 4) $x = -\sqrt{64 - y^2}$;
5) $y = 1 + \sqrt{4 - x^2}$; 6) $y = 3 - \sqrt{9 - x^2}$;
7) $x = -4 + \sqrt{81 - y^2}$; 8) $x = 6 - \sqrt{25 - y^2}$.

Построить указанные линии.

2.56. Найти длину касательной, проведенной из точки $M(5, 8)$ к окружности $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 11 = 0$.

2.57. Составить уравнение диаметра окружности $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 3 = 0$, перпендикулярного к прямой $3x - 2y + 7 = 0$.

2.58. Выяснить, как расположена прямая $y = 2x + 3$ относительно окружностей (пересекает, касается или проходит вне окружности):

1) $x^2+y^2-6x-8y=0$; 2) $x^2+y^2-6x-8y+20=0$;
3) $x^2+y^2-6x-8y+21=0$; 4) $x^2+y^2-4x+2y-32=0$.

2.59. Исследовать взаимное расположение прямой и окружности в каждом из следующих случаев:

1) $x - y + 4 = 0$, $x^2 + y^2 - 10x - 12y + 16 = 0$;
2) $3x - y + 5 = 0$, $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 55 = 0$;
3) $2x + y - 1 = 0$, $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13 = 0$.

2.60. Составить уравнение окружности, диаметром которой является отрезок прямой $3x + 4y - 12 = 0$, заключенный между осями координат.

2.61. Записать уравнение прямой, проходящей через центры двух окружностей: $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 15 = 0$, $x^2 + y^2 + 10x - 4y + 20 = 0$.

2.62. Найти расстояние между центрами двух окружностей: $x^2 + y^2 + 14x - 6y - 46 = 0$, $x^2 + y^2 + 8x + 2y + 9 = 0$.

2.63. Составить уравнение окружности, касающейся биссектрис координатных углов и проходящей через точку $B(9, 3)$.

2.64. Найти центр и радиус окружности, описанной около треугольника с вершинами $K(4, 1)$, $L(-3, -6)$, $M(5, 0)$.

2.65. Составить уравнение окружности, описанной около треугольника, стороны которого лежат на прямых: $x + y - 6 = 0$, $4x - 3y + 11 = 0$, $x - y + 2 = 0$.

2.66. Найти центр и радиус окружности, вписанной в треугольник, стороны которого лежат на прямых: $3x + 4y - 12 = 0$, $4x - 3y + 12 = 0$, $8x + 6y + 9 = 0$.

2.3. Эллипс

Эллипсом называют геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек (*фокусов*) той же плоскости есть постоянная величина.

Каноническое уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{2.10}$$

где $a=OA$ — большая, а $b=OB$ — малая полуось (рис. 2.1).

Координаты фокусов эллипса, определяемого уравнением (2.10), $x_1=-c$, $y_1=0$, $x_2=c$, $y_2=0$, т. е. $F_1(-c,\ 0)$, $F_2(c,\ 0)$, где

$$c=\sqrt{a^2-b^2}. \tag{2.11}$$

Эксцентриситетом эллипса называют отношение фокусного расстояния $2c$ к длине $2a$ большой оси:

$$\varepsilon=c/a,\ \varepsilon=\sqrt{1-b^2/a^2}. \tag{2.12}$$

Фокальными радиусами точки M *эллипса* называются отрезки прямых, соединяющих эту точку с фокусами F_1 и F_2. Их длины r_1 и r_2 можно вычислить по формулам:

$$r_1=a+\varepsilon x,\ r_2=a-\varepsilon x, \tag{2.13}$$

где ε — эксцентриситет эллипса.

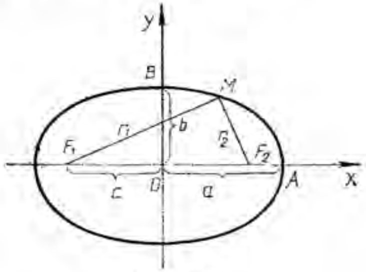


Рис. 2.1

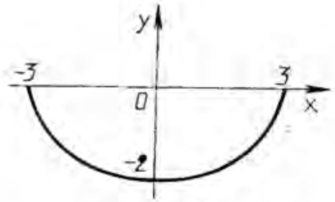


Рис. 2.2

Директрисами эллипса (2.10) называют прямые, определяемые уравнениями $x=-a/\varepsilon$, $x=a/\varepsilon$.

Примеры. 1. Какую линию определяет уравнение $3x^2+4y^2=12$?

Разделим данное уравнение почленно на 12: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. Сравнивая полученное уравнение с уравнением (2.10), заключаем, что оно (а также исходное уравнение) определяет эллипс с полуосями $a=2$, $b=\sqrt{3}$. Найдем фокусы этого эллипса. Из формулы (2.11) следует, что $c^2=a^2-b^2$. Поскольку в данном случае $a^2=4$, $b^2=3$, то $c^2=4-3=1$, $c=1$. Следовательно, фокусы эллипса находятся в точках $F_1(-1,\ 0)$, $F_2(1,\ 0)$.

2. В прямоугольной декартовой системе координат построить линию, определяемую уравнением $y=-\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$.

Преобразуем данное уравнение, возведя в квадрат обе его части:

$$y^2=\frac{4}{9}(9-x^2),\quad \frac{y^2}{4}=\frac{9-x^2}{9},\quad \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1.$$

Последнее уравнение определяет эллипс с полуосями $a=3$, $b=2$. Если разрешить это уравнение относительно y, получим:

$$y=\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2},\quad y=-\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}.$$

В условии задачи дано второе из этих уравнений. Оно определяет не весь эллипс, а только ту его часть, для точек которой $y\leqslant 0$, т. е. половину эллипса, расположенную ниже оси Ox (рис. 2.2).

3. Записать каноническое уравнение эллипса, проходящего через точки $M(3,\ 2)$, $N(3\sqrt{3,2},\ \sqrt{2})$.

Каноническое уравнение эллипса имеет вид (2.10). Так как точки M и N лежат на эллипсе, то их координаты удовлетворяют его уравнению:

$$\frac{9}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1,\quad \frac{27}{2a^2}+\frac{2}{b^2}=1.$$

Решая полученную систему уравнений, находим, что $a^2=18$, $b^2=8$.

Таким образом, получено следующее каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{8}=1.$$

2.67. Записать уравнение геометрического места точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до точек $F_1(-3,\ 0)$, $F_2(3,\ 0)$ равна 10.

2.68. Записать уравнение геометрического места точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до точек $F_1(0,\ -5)$, $F_2(0,\ 5)$ равна 26.

2.69. Составить каноническое уравнение эллипса, фокусы которого расположены на оси Ox симметрично относительно начала координат, если:

1) большая полуось равна 8, малая полуось равна 6;
2) расстояние между фокусами равно 10, большая ось равна 26;
3) большая ось равна 20, эксцентриситет равен 0,6;
4) расстояние между фокусами равно 14, эксцентриситет равен 7/9.

2.70. Составить каноническое уравнение эллипса, фокусы которого расположены на оси Oy симметрично относительно начала координат, если:

1) большая полуось равна $3\sqrt{2}$, малая полуось равна $2\sqrt{3}$;
2) расстояние между фокусами равно 24, малая ось равна 10;
3) малая ось равна 12, эксцентриситет равен 0,8;
4) расстояние между фокусами равно 6, сумма полуосей равна 9.

2.71. Дано уравнение эллипса $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{8}=1$. Проверить, лежит ли точка $M(3,\ 2)$ на данном эллипсе. Найти точки, симметричные точке M относительно: каждой координатной оси; начала координат.

2.72. Дано уравнение эллипса $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{12}=1$. Найти точки эллипса, для которых: 1) $x=0$; 2) $x=6$; 3) $x=3\sqrt{2}$; 4) $y=2$; 5) $y=2\sqrt{3}$.

2.73. Найти полуоси, фокусы и эксцентриситет каждого эллипса, заданного соответствующим уравнением:

1) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$; 2) $\frac{x^2}{28}+\frac{y^2}{64}=1$; 3) $\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{16}=1$; 4) $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{49}=1$.

Построить указанные линии.

2.74. Найти полуоси, фокусы и эксцентриситет каждого эллипса, заданного соответствующим уравнением:

1) $6x^2+10y^2=60$; 2) $10x^2+y^2=10$;

3) $4x^2+9y^2=1$; 4) $25x^2+16y^2=1$.

2.75. Найти эксцентриситет эллипса, малая ось которого видна из фокуса под углом 120°.

2.76. Расстояние между концами малой и большой осей эллипса в m/n раз больше фокусного расстояния. Найти эксцентриситет эллипса. Вычислить эксцентриситет в случае, когда $m:n=3:2$.

2.77. Записать уравнения директрис эллипса, определяемого уравнением $16x^2+20y^2=320$.

2.78. Найти расстояние между директрисами эллипса, определяемого уравнением $18x^2+9y^2=162$.

2.79. Записать каноническое уравнение эллипса, фокусы которого расположены на оси Ox симметрично относительно начала координат, если:

1) расстояние между директрисами равно 18, большая ось равна 12;

2) расстояние между директрисами равно 16, эксцентриситет равен 0,5.

2.80. Записать каноническое уравнение эллипса, фокусы которого расположены на оси Oy симметрично относительно начала координат, если:

1) расстояние между директрисами равно 50/3, малая полуось равна 4;

2) расстояние между директрисами равно 9, расстояние между фокусами равно 4.

2.81. Записать каноническое уравнение эллипса, если:

1) прямые $x=\pm 12{,}5$ являются его директрисами, малая ось равна 12;

2) прямые $y=\pm 50/3$ являются его директрисами, большая ось равна 20.

2.82. Записать каноническое уравнение эллипса, проходящего через точки $M(3, \sqrt{15})$, $N(-3\sqrt{3}, \sqrt{5})$.

2.83. Составить уравнение геометрического места точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до точек $M_1(-1, -1)$ и $M_2(1, 1)$ равна 4.

2.84. Построить линии, определяемые уравнениями:

1) $x=3\sqrt{1-y^2}$; 2) $x=-4\sqrt{1-y^2}$; 3) $y=-2\sqrt{1-x^2}$;

4) $y=3\sqrt{1-x^2}$; 5) $y=+\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$; 6) $y=-\frac{5}{4}\sqrt{16-x^2}$;

7) $x=+\frac{4}{5}\sqrt{25-y^2}$; 8) $x=-\frac{5}{6}\sqrt{36-y^2}$.

2.85. Дано уравнение эллипса $7x^2+16y^2=112$. Найти фокальные радиусы точки, для которой $x=2$.

2.86. Дано уравнение эллипса $5x^2+9y^2=45$. Найти точки эллипса, расстояние от которых до правого фокуса равно 4.

2.87. Дано уравнение эллипса $3x^2+4y^2=12$. Найти точки эллипса, расстояние от которых до левого фокуса равно 1,5.

2.88. Найти точки пересечения эллипса и прямой в каждом из следующих случаев:

1) $3x^2+y^2=3$, $3x+y-3=0$; 2) $3x^2+4y^2=192$, $x+2y-16=0$.

2.89. Исследовать взаимное расположение эллипса и прямой в каждом из следующих случаев:

1) $x^2+2y^2=4$, $x+y-1=0$; 2) $4x^2+9y^2=72$, $2x+3y-12=0$;

3) $3x^2+y^2=6$, $2x+y-18=0$; 4) $4x^2+9y^2=36$, $3x+2y-6=0$.

2.4. Гипербола

Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых модуль разности расстояний до двух данных точек (*фокусов*) той же плоскости есть величина постоянная.

Каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{2.14}$$

где $a=OA$ — действительная, а $b=OB$ — мнимая полуось (рис. 2.3).

Координаты фокусов гиперболы (2.14): $x_1=-c$, $y_1=0$, $x_2=c$, $y_2=0$, т. е. $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$, где

$$c=\sqrt{a^2+b^2}. \tag{2.15}$$

Эксцентриситетом гиперболы (2.14) называется отношение фокусного расстояния $2c$ к длине $2a$ действительной оси:

$$\varepsilon=c/a. \tag{2.16}$$

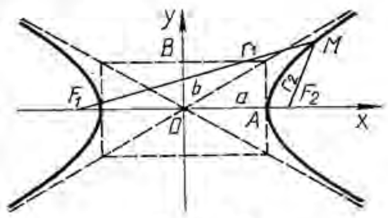


Рис. 2.3

Асимптотами гиперболы (2.14) называют прямые, определяемые уравнениями:

$$y=\frac{b}{a}x, \quad y=-\frac{b}{a}x.$$

Директрисами гиперболы (2.14) называются прямые, определяемые уравнениями:

$$x=-a/\varepsilon, \ x=a/\varepsilon,$$

где a — действительная полуось; ε — эксцентриситет.

Гипербола с равными полуосями ($b=a$) называется *равносторонней*; ее каноническое уравнение имеет вид

$$x^2-y^2=a^2.$$

Фокальные радиусы точки правой ветви гиперболы (2.14) вычисляются по формулам:

$$r_1=\varepsilon x+a, \ r_2=\varepsilon x-a; \tag{2.17}$$

фокальные радиусы точки левой ветви гиперболы (2.14) — по формулам:

$$r_1=-\varepsilon x-a, \ r_2=-\varepsilon x+a. \tag{2.18}$$

Примеры. 1. Какую линию определяет уравнение $4x^2-9y^2=36$?

Разделив обе части данного уравнения на 36, получим $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$. Сравнивая это уравнение с уравнением (2.14), заключаем, что оно определяет гиперболу с действительной полуосью $a=3$ и мнимой полуосью $b=2$.

2. Найти полуоси, координаты фокусов и эксцентриситет гиперболы, заданной уравнением $5x^2-4y^2=20$. Вычислить длины фокальных радиусов точки $M(-4, \sqrt{15})$.

Разделим обе части данного уравнения на 20, получим $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$. Сравнивая это уравнение с уравнением (2.14), заключаем, что $a^2=4$, $b^2=5$, т. е. $a=2$, $b=\sqrt{5}$. Так как $b^2=c^2-a^2$, то $c^2=a^2+b^2=9$, $c=3$, $F_1(-3, 0)$, $F_2(3, 0)$, $\varepsilon=c/a=3/2$. Поскольку точка M лежит на левой ветви гиперболы, то при вычислении r_1 и r_2 необходимо пользоваться формулами (2.18): $r_1=-\frac{3}{2}(-4)-2=$ $=4$, $r_2=-\frac{3}{2}(-4)+2=8$. Отметим, что $r_2-r_1=8-4=4=2a$.

3. Доказать, что расстояние от любого фокуса гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ до любой ее асимптоты равно b.

Асимптоты данной гиперболы определяются уравнениями $y=\pm\frac{b}{a}x$.

Найдем расстояние от правого фокуса $F_2(c, 0)$ до асимптоты $y=\frac{b}{a}x$ $(bx-$ $-ay=0)$. Принимая во внимание, что $c=\sqrt{a^2+b^2}$, по формуле (2.8) находим указанное расстояние:

$$d=\frac{|bc-a\cdot 0|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}=b.$$

Аналогично доказывается, что расстояние от фокуса F_2 до асимптоты $bx+ay=0$ и расстояние от фокуса F_1 до каждой из асимптот равно b.

2.90. Записать уравнение геометрического места точек плоскости, для каждой из которых разность расстояний до двух точек $F_1(-5, 0)$, $F_2(5, 0)$ по абсолютной величине равна 8.

2.91. Записать уравнение геометрического места точек плоскости, для каждой из которых разность расстояний до двух точек $F_1(0, -10)$, $F_2(0, 10)$ по абсолютной величине равна 12.

2.92. Записать каноническое уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси Ox симметрично относительно начала координат, если:

1) действительная ось равна 14, мнимая ось равна 10;

2) расстояние между фокусами равно 20, действительная ось равна 12;

3) действительная ось равна 6, эксцентриситет равен 5/3;

4) расстояние между фокусами равно 26, эксцентриситет равен 2,6.

2.93. Записать каноническое уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси Oy симметрично относительно начала координат, если:

1) действительная полуось равна $2\sqrt{5}$, мнимая полуось равна $3\sqrt{2}$;

2) расстояние между фокусами равно 10, мнимая ось равна 8;

3) мнимая ось равна 16, эксцентриситет равен 5/3;

4) расстояние между фокусами равно 26, сумма полуосей равна 17.

2.94. Дано уравнение гиперболы $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{1}=1$. Проверить, лежит ли точка $M(2, 1)$ на данной гиперболе. Найти точки, симметричные точке M относительно каждой координатной оси и начала координат.

2.95. Дано уравнение гиперболы $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1$. Найти точки, для которых: 1) $x=3$; 2) $x=4\sqrt{2}$; 3) $x=5$; 4) $y=0$; 5) $y=1$.

2.96. Найти полуоси, фокусы, эксцентриситет и асимптоты каждой гиперболы, заданной уравнением:

1) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$; 2) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$; 3) $-\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{25}=1$.

Построить эти гиперболы.

2.97. Найти полуоси, фокусы, эксцентриситет и асимптоты каждой гиперболы, заданной уравнением:

1) $5x^2-4y^2=20$; 2) $7x^2-9y^2=63$; 3) $x^2-8y^2+8=0$.

2.98. Записать уравнения директрис каждой гиперболы:

1) $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{16}=1$; 2) $-\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{24}=1$;

3) $\frac{x^2}{28}-\frac{y^2}{36}=1$; 4) $-\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{32}=1$.

Найти расстояние между директрисами в каждом случае.

2.99. Вычислить площадь треугольника, образованного асимптотами гиперболы $9x^2-16y^2=1$ и прямой $3x-2y-12=0$.

2.100. Вычислить расстояние от фокуса гиперболы $x^2-8y^2=8$ до ее асимптоты.

2.101. Записать уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси Ox симметрично относительно начала координат, если известно, что:

1) расстояние между фокусами равно 20, уравнения асимптот $y=\pm\frac{3}{4}x$;

2) расстояние между директрисами равно 14, расстояние между фокусами равно 16;

3) расстояние между директрисами равно 20/3, эксцентриситет равен $3\sqrt{5}/5$;

4) гипербола является равносторонней и проходит через точку $M(3, \sqrt{5})$.

2.102. Записать уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси Oy симметрично относительно начала координат, если известно, что:

1) расстояние между вершинами равно 4, уравнения асимптот $y=\pm\frac{2}{3}x$;

2) расстояние между директрисами равно $16/\sqrt{5}$, уравнения асимптот $y=\pm 2x$.

3) расстояние между директрисами равно 8, эксцентриситет равен $\sqrt{5}/2$;

4) гипербола является равносторонней и проходит через точку $M(6, 4\sqrt{3})$.

2.103. Записать уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси Ox симметрично относительно начала координат, если даны:

1) две ее точки $M(\sqrt{6}, 1)$ и $N(\sqrt{5}, -\sqrt{2}/2)$;

2) точка $M(4, 2)$, действительная ось $a = 2\sqrt{2}$;

3) точка $M(6, 2)$, уравнения асимптот $x - 2y = 0$, $x + 2y = 0$;

4) точка $M(8, 3\sqrt{3})$ и эксцентриситет $\varepsilon = 1,25$.

2.104. Составить уравнение геометрического места точек плоскости, для каждой из которых модуль разности расстояний до точек $M_1(-1, 1)$ и $M_2(1, -1)$ равен 2.

2.105. Построить линии, определяемые уравнениями:

1) $y = \sqrt{x^2 - 4}$; 2) $y = -\sqrt{x^2 + 9}$;

3) $x = \sqrt{y^2 + 4}$; 4) $x = -\sqrt{y^2 - 9}$.

2.106. Дано уравнение гиперболы $7x^2 - 9y^2 = 63$. Найти фокальные радиусы точек $M(6, \sqrt{21})$ и $N(-9, 2\sqrt{14})$.

2.107. Найти точки гиперболы $5x^2 - 4y^2 = 20$, расстояние от которых до правого фокуса равно 10.

2.108. Найти точки гиперболы $9x^2 - 16y^2 = 144$, расстояние от которых до левого фокуса равно 14.

2.109. Найти точки пересечения гиперболы и прямой в каждом из следующих случаев:

1) $3x^2 - 5y^2 = 7$, $x - y - 1 = 0$; 2) $8x^2 - 3y^2 = 5$, $2x - y - 1 = 0$.

2.110. Исследовать взаимное расположение гиперболы и прямой:

1) $5x^2 - y^2 = 4$, $5x + 3y - 2 = 0$;
2) $6x^2 - y^2 = 5$, $6x - y - 5 = 0$;
3) $16x^2 - 9y^2 = 144$, $7x - y - 7 = 0$;
4) $9x^2 - 4y^2 = 36$, $2x - y - 1 = 0$.

2.5. Парабола

Параболой называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от данной точки (*фокуса*) и данной прямой (*директрисы*), лежащих в той же плоскости.

Уравнение параболы, симметричной относительно оси Ox и проходящей через начало координат (рис. 2.4), имеет вид

$$y^2 = 2px; \tag{2.19}$$

уравнение ее директрисы

$$x = -p/2. \tag{2.20}$$

Парабола, определяемая уравнением (2.19), имеет фокус $F(p/2, 0)$. Фокальный радиус ее точки $M(x, y)$ вычисляется по формуле

$$r = x + p/2. \tag{2.21}$$

Парабола, симметричная относительно оси Oy и проходящая через начало координат, определяется уравнением

$$x^2 = 2qy. \tag{2.22}$$

Фокус этой параболы находится в точке $F(0, q/2)$; уравнение ее директрисы имеет вид $y = -q/2$. Фокальный радиус точки $M(x, y)$ параболы (2.22) выражается формулой $r = y + q/2$.

Примеры. 1. Найти координаты фокуса и уравнение директрисы параболы $y^2 = 16x$. Вычислить расстояние от точки $M(1, 4)$ до фокуса.

Сравнивая уравнение $y^2 = 16x$ с уравнением (2.19), находим, что $2p = 16$, откуда $p = 8$, $p/2 = 4$. В соответствии с формулой (2.20) получаем уравнение $x = -4$ директрисы параболы. Фокус параболы находится в точке $F(4, 0)$. Точка $M(1, 4)$ лежит на параболе, так как ее координаты удовлетворяют уравнению $y^2 = 16x$. По формуле (2.21) находим фокальный радиус точки M: $r = 5$.

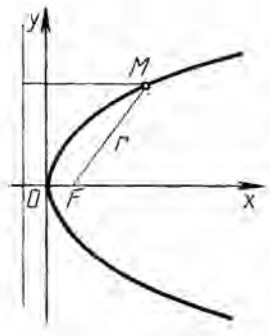


Рис. 2.4

2. Найти координаты фокуса и уравнение директрисы параболы $x^2 = 4y$. Вычислить расстояние от точки $M(6, 9)$ до фокуса.

Сравнивая уравнение $x^2 = 4y$ с уравнением (2.22), получаем $2q = 4$, откуда $q = 2$, $q/2 = 1$. Следовательно, фокус параболы находится в точке $F(0, 1)$, уравнение директрисы имеет вид $y = -1$, а фокальный радиус точки M $r = 9 + 1 = 10$.

3. Составить уравнение параболы, симметричной относительно оси Ox и проходящей через точки $M(5, 4)$, $N(15, -6)$.

Так как парабола симметрична относительно оси Ox, то в ее уравнение y входит только во второй степени. Уравнение этой параболы имеет вид $y^2 = 2px + c$, где p и c — некоторые постоянные. Найдем p и c, использовав условие задачи. Поскольку точки M и N лежат на параболе, то их координаты должны удовлетворять ее уравнению:

$$4^2 = 2p \cdot 5 + c, \quad (-6)^2 = 2p \cdot 15 + c.$$

Из уравнений $16 = 10p + c$, $36 = 30p + c$ находим $p = 1$, $c = 6$.

Таким образом, данная парабола определяется уравнением

$$y^2 = 2x + 6 \text{ или } y^2 = 2(x + 3).$$

2.111. Записать уравнение геометрического места точек, равноудаленных от указанных точки и прямой:

1) $F(1, 0)$, $x = -1$; 2) $F(0; 1,5)$, $y = -1,5$;

3) $F(-2, 0)$, $x = 2$; 4) $F(0, -3)$, $y = 3$.

2.112. Найти фокус и записать уравнение директрисы каждой параболы, заданной уравнением:

1) $y^2 = 8x$; 2) $y^2 = -10x$; 3) $x^2 = 2y$; 4) $x^2 = -4y$;

5) $3x^2 - 4y = 0$; 6) $5x^2 + 8y = 0$; 7) $7y^2 + 20x = 0$; 8) $9y^2 + 16x = 0$.

Построить данные параболы, их фокусы и директрисы относительно прямоугольной декартовой системы координат.

2.113. Записать каноническое уравнение параболы, если известно, что:

1) фокус находится в точке $F(4, 0)$;
2) фокус находится в точке $F(0, 3)$;
3) директриса имеет уравнение $x - 3 = 0$;

4) директриса имеет уравнение $y-2=0$.

2.114. Записать каноническое уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, если известно, что:

1) парабола расположена в левой полуплоскости, симметрична относительно оси Ox, ее параметр $p=2{,}5$;

2) парабола расположена в верхней полуплоскости, симметрична относительно оси Oy, ее параметр $p=1/2$;

3) парабола симметрична относительно оси Ox и проходит через точку $A(1, -3)$;

4) парабола симметрична относительно оси Oy и проходит через точку $B(1, -2)$.

2.115. Дано уравнение параболы $5y^2-4x=0$. Проверив, лежит ли точка $M(5, -2)$ на параболе, вычислить ее фокальный радиус.

2.116. Дано уравнение параболы $7x^2-8y=0$. Проверив, лежит ли точка $N(2\sqrt{2}, 7)$ на параболе, вычислить ее фокальный радиус.

2.117. На параболе $y^2=4x$ найти точку, расстояние от которой до фокуса равно 5.

2.118. На параболе $x^2=8y$ найти точку, расстояние от которой до фокуса равно 4.

2.119. Найти точки пересечения параболы и прямой в каждом из следующих случаев:

1) $y^2=16x$, $4x-y-8=0$; 2) $y^2=-9x$, $3x+4y-9=0$.

2.120. Исследовать взаимное расположение параболы и прямой:

1) $x^2=4y$, $x-2y+4=0$; 2) $3y^2+4x=0$, $2x+9y-12=0$;

3) $y^2=8x$, $x+y+2=0$; 4) $x^2=12y$, $x+y+3=0$;

5) $2y^2=5x$, $3x-y+10=0$; 6) $3x^2+7y=0$, $2x+3y-6=0$.

2.121. Через вершину параболы $y^2=4\sqrt{2}x$ проведена прямая под углом 45° к ее оси. Вычислить длину хорды, отсекаемой параболой на этой прямой.

2.122. Через фокус параболы $x^2=6\sqrt{2}y$ проведена хорда под углом 45° к ее оси. Вычислить расстояние от середины этой хорды до фокуса.

2.123. В параболу $x^2=2qy$ вписан равносторонний треугольник так, что одна из его вершин совпадает с вершиной параболы. Найти длину его стороны.

2.124. Составить уравнение параболы, симметричной относительно оси Ox и проходящей через точки $M(5, 4)$, $N(7, -2\sqrt{2})$. Найти точки пересечения параболы с координатными осями.

2.125. Составить уравнение параболы, симметричной относительно оси Oy и проходящей через точки $M(-4, 3)$, $N(2, -3)$. Найти точки пересечения параболы с координатными осями.

2.126. В прямоугольной декартовой системе координат построить линии, определяемые уравнениями:

1) $y=2\sqrt{x}$; 2) $y=-3\sqrt{x}$; 3) $x=4\sqrt{y}$; 4) $x=-5\sqrt{y}$;

5) $y=\sqrt{-x}$; 6) $y=-2\sqrt{-x}$; 7) $x=\frac{1}{2}\sqrt{-y}$; 8) $x=-\frac{1}{4}\sqrt{-y}$.

2.6. Упрощение уравнения второй степени, не содержащего члена с произведением координат

Рассмотрим уравнение второй степени относительно прямоугольных декартовых координат x и y, не содержащее члена Bxy, т. е. уравнение

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0. \qquad (2.23)$$

Перейдем к другой системе координат $C\,XY$, получающейся из исходной путем параллельного переноса в точку $O_1(x_0, y_0)$, при котором старые координаты x, y любой точки M выражаются через ее новые координаты X, Y с помощью следующих формул: $x=X+x_0$, $y=Y+y_0$.

Уравнение (2.23) посредством выделения полных квадратов может быть приведено к одному из следующих канонических уравнений:

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1,\quad \frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=0,\quad \frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=-1 \text{ (при } AC>0);$$

$$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1,\quad -\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1,\quad \frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=0 \text{ (при } AC<0);$$

$$X^2=2qY,\quad X^2=0,\quad X^2=-a^2,\quad X^2=a^2 \quad \text{(при } C=0).$$

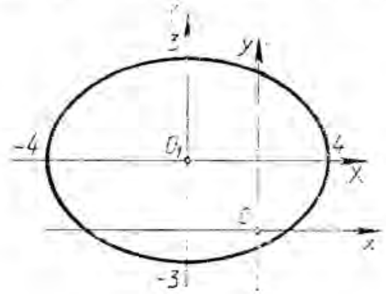


Рис. 2.5

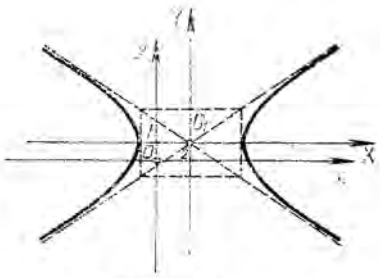


Рис. 2.6

Примеры. 1. Построить линию, определяемую уравнением

$$9x^2+16y^2+36x-64y-44=0.$$

Вынося за скобки коэффициенты при квадратах координат и выделяя полные квадраты, получаем

$$9(x^2+4x+4)+16(y^2-4y+4)-36-64-44=0,$$

т. е.

$$9(x+2)^2+16(y-2)^2=144 \text{ или } \frac{(x+2)^2}{16}+\frac{(y-2)^2}{9}=1.$$

Переходя к новым координатам по формулам: $X=x+2$, $Y=y-2$, последнему уравнению придаем вид

$$\frac{X^2}{16}+\frac{Y^2}{9}=1.$$

Это уравнение является уравнением эллипса с полуосями $a=4$, $b=3$ и центром в точке $X=0$, $Y=0$ (рис. 2.5), т. е. $x+2=0$, $y-2=0$, откуда $x=-2$, $y=2$. Начало новой системы координат находится в точке $O_1(-2, 2)$.

2. Построить линию, определяемую уравнением

$$4x^2-9y^2-16x+18y-29=0.$$

Преобразуя левую часть уравнения, получаем:

$$4(x^2-4x+4)-9(y^2-2y+1)-16+9-29=0,$$

$$4(x-2)^2-9(y-1)^2=36 \text{ или } \frac{(x-2)^2}{9}-\frac{(y-1)^2}{4}=1.$$

Перейдя к новым координатам по формулам: $X=x-2$, $Y=y-1$, получим уравнение

$$\frac{X^2}{9}-\frac{Y^2}{4}=1,$$

определяющее гиперболу с центром в точке $O_1(2,\ 1)$ и полуосями $a=3$, $b=2$ (рис. 2.6).

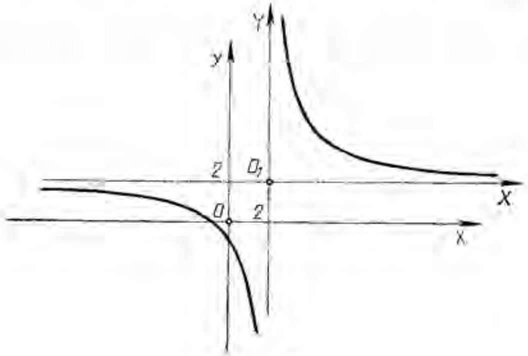


Рис. 2.7

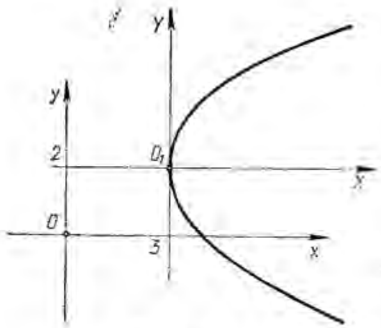


Рис. 2.8

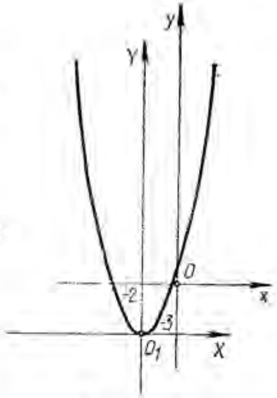


Рис. 2.9

3. Построить линию, определяемую уравнением

$$xy-2x-2y-2=0.$$

Преобразуем левую часть уравнения:

$$xy-2x-2y-2=x(y-2)-2(y-2)-4-2=0,$$
$$(y-2)(x-2)-6=0 \text{ или } (x-2)(y-2)=6.$$

Переходя к новым координатам по формулам: $X=x-2$, $Y=y-2$, получаем уравнение $XY=6$, определяющее равностороннюю гиперболу с центром в точке $O_1(2,\ 2)$, асимптотами которой служат координатные оси (рис. 2.7).

4. Построить линию, определяемую уравнением

$$y^2-4x-4y+16=0.$$

Преобразуем левую часть уравнения:

$$(y^2-4y+4)-4-4x+16=(y-2)^2-4(x-3)=0,$$
$$(y-2)^2=4(x-3).$$

Последнее уравнение запишем в виде $Y^2=4X$, где $Y=y-2$; $X=x-3$. Это уравнение определяет параболу, вершина которой находится в точке $O_1(3,\ 2)$, а ось параллельна оси Ox (рис. 2.8).

5. Построить линию, определяемую уравнением

$$x^2+4x-y+1=0.$$

Это уравнение приводится к каноническому виду $X^2=Y$, где $X=x+2$, $Y=y+3$, и определяет параболу с вершиной в точке $O_1(-2,\ -3)$ и осью, параллельной оси Oy (рис. 2.9).

В задачах 2.127—2.146 построить линию, определяемую уравнением.

2.127. $9x^2+4y^2-18x+8y-23=0$.
2.128. $16y^2-9x^2+32y+54x-209=0$.
2.129. $y^2+2x-2y-7=0$.
2.130. $x^2-4x+4y=0$. **2.131.** $xy-x+3y-7=0$.
2.132. $9x^2+25y^2-36x-50y-164=0$.
2.133. $x^2+2y^2+4x-12y+18=0$.
2.134. $9x^2-16y^2-18x-64y-199=0$.
2.135. $9y^2-4x^2+18y+8x-31=0$.
2.136. $2x^2+4x-y-1=0$. **2.137.** $y^2-2y-x-1=0$.
2.138. $3x^2-6x+y+1=0$. **2.139.** $4y^2+8y+x-1=0$.
2.140. $xy+2x-3y-14=0$. **2.141.** $xy-x+5y+1=0$.
2.142. $9x^2+4y^2-18x+16y-11=0$.
2.143. $4y^2-9x^2-8y-36x+32=0$.
2.144. $9x^2-16y^2+90x+64y+161=0$.
2.145. $x^2+8x+7=0$. **2.146.** $y^2-6y+5=0$.

В задачах 2.147—2.154 выяснить, какое геометрическое место точек определяет уравнение.

2.147. $x^2+y^2+2x-6y+10=0$.
2.148. $x^2+y^2-2x+4y+9=0$.
2.149. $4x^2+9y^2+24x-36y+72=0$.
2.150. $2x^2+y^2-12x-2y+23=0$.
2.151. $4x^2-9y^2-8x+36y+32=0$.
2.152. $x^2-4y^2+12x+32y-28=0$.
2.153. $4x^2-4xy+y^2+4x-2y-3=0$.
2.154. $9x^2-24xy+16y^2+12x-16y+4=0$.

2.7. Упрощение общего уравнения второй степени

Общее уравнение второй степени относительно прямоугольных декартовых координат x и y

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

при повороте координатных осей на угол α, для которого

$$\operatorname{ctg} 2\alpha=\frac{A-C}{2B}. \qquad (2.24)$$

преобразуется в уравнение

$$A_1x'^2 + C_1y'^2 + D_1x' + E_1y' + F = 0,$$

являющееся уравнением вида (2.23).

Формулы преобразования координат имеют вид:

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha,\quad y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha, \tag{2.25}$$

причем

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}},\quad \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}; \tag{2.26}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg} 2\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 2\alpha}}, \tag{2.27}$$

где $\operatorname{ctg} 2\alpha$ определяется формулой (2.24).

Примеры. 1. Построить линию, определяемую уравнением

$$9x^2 + 4xy + 6y^2 = 10.$$

В данном случае $A = 9$, $2B = 4$, $C = 6$. По формуле (2.24) находим

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{9-6}{4} = \frac{3}{4}.$$

Согласно формуле (2.27), выбирая знак плюс, получаем

$$\cos 2\alpha = \frac{3/4}{\sqrt{1+9/16}} = \frac{3/4}{5/4} = \frac{3}{5}.$$

Взяв в формулах (2.26) верхние знаки, найдем:

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{1-3/5}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}},\quad \cos\alpha = \sqrt{\frac{1+3/5}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

В этом случае формулы преобразования (2.25) примут вид:

$$x = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' - y'),\quad y = \frac{1}{\sqrt{5}}(x' + 2y').$$

Подставляя эти выражения для x и y в исходное уравнение, получаем:

$$\frac{9}{5}(2x' - y')^2 + \frac{4}{5}(2x' - y')(x' + 2y') + \frac{6}{5}(x' + 2y')^2 = 10,$$

$$9(4x'^2 - 4x'y' + y'^2) + 4(2x'^2 + 3x'y' - 2y'^2) + {}$$
$$+ 6(x'^2 + 4x'y' + 4y'^2) = 50,$$

$$50x'^2 + 25y'^2 = 50 \text{ или } \frac{x'^2}{1} + \frac{y'^2}{2} = 1.$$

Последнее уравнение определяет эллипс с полуосями $a = 1$, $b = \sqrt{2}$. Построим его относительно новой системы координат $Ox'y'$ (рис. 2.10). Чтобы построить ось Ox' новой системы, нет необходимости находить по таблицам угол α. Достаточно ввести в рассмотрение $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{2}$ и построить угол по его тангенсу (отложить на оси Ox вправо от точки O отрезок, длина которого равна двум, через конец его провести перпендикуляр, на нем, вверх от оси Ox, отложить единичный отрезок, провести прямую через конец последнего отрезка и точку O).

2. Построить линию, определяемую уравнением

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 - 14x - 2y + 5 = 0.$$

По формуле (2.24)

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = (5-5)/6 = 0.$$

Взяв $2\alpha = -\pi/2$, т. е. $\alpha = -\pi/4$, получим следующие формулы преобразования:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y'),\quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x' + y'). \tag{1}$$

Подставляя эти выражения в исходное уравнение, находим:

$$\frac{5}{2}(x' + y')^2 + \frac{6}{2}(-x' + y')(x' + y') + \frac{5}{2}(-x' + y')^2 - 7\sqrt{2}(x' + y') - {}$$
$$- \sqrt{2}(-x' + y') + 5 = 0,$$

$$\frac{5}{2}(x'^2 + 2x'y' + y'^2) + \frac{6}{2}(-x'^2 + y'^2) + \frac{5}{2}(x'^2 - 2x'y' + y'^2) - {}$$
$$- 7\sqrt{2}x' - 7\sqrt{2}y' + \sqrt{2}x' - \sqrt{2}y' + 5 = 0,$$

$$2x'^2 + 8y'^2 - 6\sqrt{2}x' - 8\sqrt{2}y' + 5 = 0.$$

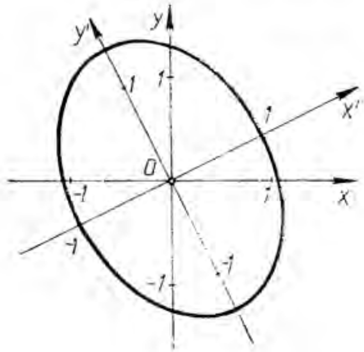


Рис. 2.10

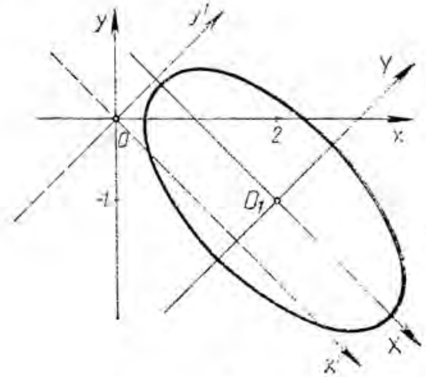


Рис. 2.11

Преобразуем левую часть уравнения:

$$2\left(x'^2 - 2\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2}x' + \frac{9}{2}\right) + 8\left(y'^2 - 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}y' + \frac{1}{2}\right) - 9 - 4 + 5 = 0,$$

$$2\left(x' - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 8\left(y' - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 8.$$

Перейдя к новым координатам по формулам:

$$X = x' - 3\sqrt{2}/2,\quad Y = y' - \sqrt{2}/2, \tag{2}$$

преобразуем последнее уравнение к виду

$$2X^2 + 8Y^2 = 8 \text{ или } \frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{1} = 1. \tag{3}$$

Построим эллипс по его каноническому уравнению (3). Угол наклона оси O_1X уже известен ($\alpha = -45°$), осталось определить координаты точки O_1. В системе O_1XY эта точка (центр эллипса) имеет координаты $X = 0$, $Y = 0$; по формулам (2) находим ее координаты $x' = 3\sqrt{2}/2$, $y' = \sqrt{2}/2$ в промежуточной системе $Ox'y'$, а по формулам (1) — ее координаты $x = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1$ в старой системе Oxy (рис. 2.11).

3. Построить линию, определяемую уравнением

$$3x^2-10xy+3y^2+4x+4y+12=0.$$

В соответствии с формулой (2.24) получаем

$$\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{3-3}{-10}=0.$$

Взяв $2\alpha=\pi/2$, откуда $\alpha=\pi/4$, найдем формулы преобразования:

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y'),\quad y=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y'). \tag{1}$$

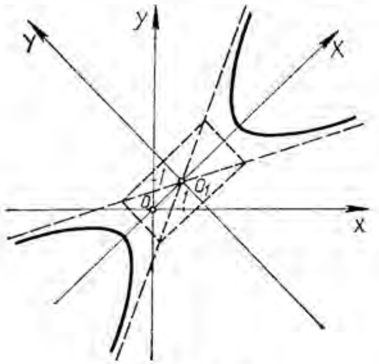


Рис. 2.12

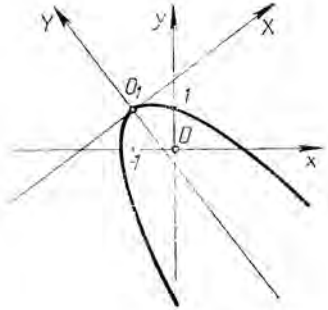


Рис. 2.13

Подставляем эти выражения в исходное уравнение:

$$\frac{3}{2}(x'-y')^2-\frac{10}{2}(x'-y')(x'+y')+\frac{3}{2}(x'+y')^2+$$

$$+\frac{4\sqrt{2}}{2}(x'-y')+\frac{4\sqrt{2}}{2}(x'+y')+12=0,$$

$$\frac{3}{2}(x'^2-2x'y'+y'^2)-5(x'^2-y'^2)+\frac{3}{2}(x'^2+2x'y'+y'^2)+$$

$$+2\sqrt{2}(x'-y')+2\sqrt{2}(x'+y')+12=0,$$

$$-2x'^2+8y'^2+4\sqrt{2}x'+12=0,$$

$$(x'^2-2\sqrt{2}x'+2)-4y'^2-2-6=0,$$

$$(x'-\sqrt{2})^2-4y'^2=8.$$

Вводя новые координаты по формулам:

$$X=x'-\sqrt{2},\ Y=y', \tag{2}$$

получаем

$$X^2-4Y^2=8\ \text{или}\ \frac{X^2}{8}-\frac{Y^2}{2}=1. \tag{3}$$

Построим гиперболу с полуосями $a=2\sqrt{2}$, $b=\sqrt{2}$ в новой системе координат, начало которой находится в центре гиперболы. Центр гиперболы имеет координаты $X=0$, $Y=0$ в системе O_1XY; $x'=\sqrt{2}$, $y'=0$ в системе $Ox'y'$ (получено из уравнений (2)); $x=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}-0)=1$, $y=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}+0)=1$ в исходной системе Oxy. Строим (рис. 2.12) новую систему координат O_1XY с началом в точ-

ке $O_1(1,\ 1)$, ось O_1X которой составляет с осью Ox угол $\alpha=45°$. Построим гиперболу по ее каноническому уравнению (3). Мнимая полуось $b=\sqrt{2}$ равна длине гипотенузы прямоугольного треугольника с катетами, равными единице, действительная полуось $a=2\sqrt{2}$ — удвоенной длине указанной гипотенузы. Строим основной прямоугольник с основанием $2a$, высотой $2b$ и центром в точке O_1, прямые, лежащие на его диагоналях (асимптоты гиперболы), и саму гиперболу.

4. Построить линию, определяемую уравнением

$$16x^2+24xy+9y^2-7x+26y-34=0.$$

По формуле (2.24) находим

$$\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{16-9}{24}=\frac{7}{24}.$$

Взяв в формуле (2.27) знак плюс, получим

$$\cos 2\alpha=\frac{7/24}{\sqrt{1+49/576}}=\frac{7/24}{\sqrt{625/576}}=\frac{7/24}{25/24}=\frac{7}{25}.$$

В формулах (2.26) также возьмем знак плюс, тогда

$$\text{in}\,\alpha=\sqrt{\frac{1-7/25}{2}}=\frac{3}{5},\quad \cos\alpha=\sqrt{\frac{1+7/25}{2}}=\frac{4}{5}.$$

Формулы (2.25) запишутся так:

$$x=\frac{1}{5}(4x'-3y'),\quad y=\frac{1}{5}(3x'+4y').$$

Подставим эти выражения в исходное уравнение:

$$\frac{16}{25}(4x'-3y')^2+\frac{24}{25}(4x'-3y')(3x'+4y')+\frac{9}{25}(3x'+4y')^2-$$

$$-\frac{7}{5}(4x'-3y')+\frac{26}{5}(3x'+4y')-34=0,$$

$$\frac{16}{25}(16x'^2-24x'y'+9y'^2)+\frac{24}{25}(12x'^2+7x'y'-12y'^2)+$$

$$+\frac{9}{25}(9x'^2+24x'y'+16y'^2)-\frac{7}{5}(4x'-3y')+\frac{26}{5}(3x'+4y')-34=0,$$

$$25x'^2+10x'+25y'-34=0,$$

$$25\left(x'+\frac{1}{5}\right)^2+25y'-35=0,$$

$$\left(x'+\frac{1}{5}\right)^2=-\left(y'-\frac{7}{5}\right).$$

Переходя к новым координатам по формулам:

$$X=x'+1/5,\ Y=y'-7/5,$$

получаем каноническое уравнение $X^2=-Y$.

Построим параболу, определяемую данным уравнением относительно системы координат O_1XY, начало которой находится в вершине параболы (рис. 2.13). Вершина параболы имеет координаты $X=0$, $Y=0$ в системе O_1XY; $x'=-1/5$, $y'=7/5$ в системе $Ox'y'$; $x=\frac{1}{5}\left(-\frac{4}{5}-\frac{21}{5}\right)=-1$, $y=\frac{1}{5}\left(\frac{3}{5}+\frac{28}{5}\right)=1$ в исходной системе Oxy, т. е. вершина находится в точке $O_1(-1,\ 1)$.

В задачах 2.155—2.198 построить линию, определяемую уравнением.

2.155. $x^2 - 6xy + y^2 - 10x - 2y - 11 = 0$.
2.156. $7x^2 - 10xy + 7y^2 - 4x + 4y - 8 = 0$.
2.157. $x^2 + 4xy + 4y^2 + 6x - 3y + 15 = 0$.
2.158. $4x^2 + 4y^2 - 8x + 16y + 11 = 0$.
2.159. $x^2 + y^2 - 2xy + 4x - 4y + 4 = 0$.
2.160. $x^2 + 2xy - 3y^2 + x + 3y = 0$.
2.161. $x^2 + 4xy + 4y^2 - 3x - 6y = 0$.
2.162. $3x^2 + 2xy + 3y^2 + 8x + 8y + 4 = 0$.
2.163. $9x^2 - 24xy + 16y^2 + 2x - 11y + 8 = 0$.
2.164. $3x^2 + 4xy - 4x - 8y = 0$.
2.165. $3x^2 + 8xy + 3y^2 - 2x + 2y + 5 = 0$.
2.166. $4x^2 + 6xy + 4y^2 - 2x + 2y - 5 = 0$.
2.167. $16x^2 + 24xy + 9y^2 - 7x + 26y - 34 = 0$.
2.168. $2x^2 + 6xy + 2y^2 + 2x - 2y + 3 = 0$.
2.169. $3x^2 + 4xy + 3y^2 - 6x - 4y - 2 = 0$.
2.170. $x^2 - 2xy + y^2 + 4x - 8y + 7 = 0$.
2.171. $19x^2 - 24xy + y^2 + 14x - 22y - 29 = 0$.
2.172. $21x^2 - 16xy + 9y^2 + 16x - 18y - 16 = 0$.
2.173. $x^2 + 2xy + y^2 - 10x + 6y + 25 = 0$.
2.174. $11x^2 - 16xy - y^2 - 26x - 22y - 61 = 0$.
2.175. $13x^2 - 8xy + 7y^2 + 18x + 6y - 3 = 0$.
2.176. $4x^2 - 4xy + y^2 - 4x - 8y - 20 = 0$.
2.177. $7x^2 + 12xy - 2y^2 + 4x + 32y - 38 = 0$.
2.178. $9x^2 + 4xy + 6y^2 - 32x + 4y + 24 = 0$.
2.179. $3x^2 - 10xy + 3y^2 - 16x + 16y + 24 = 0$.
2.180. $4x^2 + 4xy + y^2 - 2x - 6y - 5 = 0$.
2.181. $x^2 + 4xy + y^2 - 2x + 2y - 5 = 0$.
2.182. $2x^2 - 2xy + 2y^2 + 6x + 6y + 15 = 0$.
2.183. $x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 13y + 10 = 0$.
2.184. $5x^2 + 8xy + 5y^2 + 4x - 4y - 1 = 0$.
2.185. $4x^2 + 10xy + 4y^2 + 6x + 12y + 9 = 0$.
2.186. $7x^2 - 18xy + 7y^2 - 4x - 4y + 12 = 0$.
2.187. $9x^2 - 14xy + 9y^2 + 8x + 8y = 0$.
2.188. $5x^2 - 14xy + 5y^2 - 4x - 4y + 8 = 0$.
2.189. $17x^2 + 12xy + 8y^2 - 22x + 4y - 7 = 0$.
2.190. $5x^2 - 6xy + 5y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$.
2.191. $3x^2 - 10xy + 3y^2 - 22x + 8y = 0$.
2.192. $3x^2 + xy + 3y^2 + 7x + 7y + 3 = 0$.
2.193. $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$.
2.194. $x^2 + 2xy + y^2 - 1 = 0$. **2.195.** $x^2 - y^2 + 3x + y + 2 = 0$.
2.196. $x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$.
2.197. $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 2x + 2y + 11 = 0$.
2.198. $3x^2 - 10xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$.

II. ОСНОВЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ В ПРОСТРАНСТВЕ

3. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Некоторые физические величины (например, температура, масса, работа) могут быть охарактеризованы одним числом, выражающим отношение одной рассматриваемой величины к другой однородной величине, принятой за единицу измерения. Такие величины называют *скалярными*. Другие величины (например, сила, скорость, ускорение) характеризуются числом и направлением; они называются *векторными*. Для геометрического изображения физических векторных величин служат векторы.

3.1. Векторы

Вектором называется направленный отрезок. Если начало вектора находится в точке A, а конец — в точке B, то вектор обозначают так: $\overline{AB}$ или $\overrightarrow{AB}$. Для обозначения векторов используют также строчные (в некоторых случаях — прописные) буквы латинского алфавита, выделенные жирным шрифтом, например **a**, **b**, или такие же буквы светлого шрифта с черточкой сверху, например $\bar{a}$, $\bar{b}$. Длина вектора **a** называется его *модулем* и обозначается $|\mathbf{a}|$ или a. *Единичным вектором* называется вектор, длина которого равна единице.

Векторы, лежащие на параллельных прямых (или на одной и той же прямой), называются *коллинеарными*.

Векторы, лежащие в параллельных плоскостях (или в одной плоскости), называются *компланарными*.

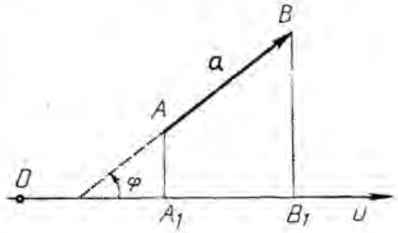


Рис. 3.1

Проекцией вектора AB на ось Ou называется величина вектора $\overline{A_1B_1}$, где A_1, B_1 — проекции точек A и B на эту ось (рис. 3.1).

Если φ — угол между вектором **a** и осью Ou (см. рис. 3.1), то проекция вектора **a** на ось Ou равна произведению длины этого вектора на косинус угла φ:

$$\text{пр}_u \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cos \varphi. \qquad (3.1)$$

Прямоугольными декартовыми координатами точки M в пространстве называются числа x, y, z, выражающие величины векторов $\overline{OM}_x$, $\overline{OM}_y$, $\overline{OM}_z$ (рис. 3.2), где M_x, M_y, M_z — проекции этой точки на взаимно перпендикулярные координатные оси: ось Ox (ось абсцисс), ось Oy (ось ординат), ось Oz (ось аппликат), т. е.

$$x = OM_x,\ y = OM_y,\ z = OM_z.$$

Координатами вектора **a** называются проекции X, Y, Z этого вектора на оси координат:

$$X = \text{пр}_x \mathbf{a},\ Y = \text{пр}_y \mathbf{a},\ Z = \text{пр}_z \mathbf{a}.$$

Запись $\mathbf{a} = (X, Y, Z)$ или $\mathbf{a}(X, Y, Z)$ означает, что вектор **a** имеет координаты X, Y, Z.

Координаты суммы (*разности*) двух *векторов* равны суммам (разностям) соответствующих координат. *Координаты произведения вектора на число* равны произведениям соответствующих координат вектора на это число.

Если $\mathbf{b} = \alpha\mathbf{a}$, где $\mathbf{a} = (X_1, Y_1, Z_1)$, $\mathbf{b} = (X_2, Y_2, Z_2)$, то

$$X_2 = \alpha X_1,\ Y_2 = \alpha Y_1,\ Z_2 = \alpha Z_1.$$

Эти равенства выражают необходимое и достаточное условие коллинеарности векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Радиусом-вектором точки M называется вектор $\overline{OM}$, начало которого совпадает с началом координат, а конец—с точкой M (см. рис. 3.2).

Если $\mathbf{r}_1 = \overline{OM_1}$ и $\mathbf{r}_2 = \overline{OM_2}$ — радиусы-векторы точек $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ (рис. 3.3), то вектор $\overline{M_1M_2} = (X, Y, Z)$ определяется формулой $\overline{M_1M_2} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, т. е.:

$$X = x_2 - x_1,\ Y = y_2 - y_1,\ Z = z_2 - z_1. \tag{3.2}$$

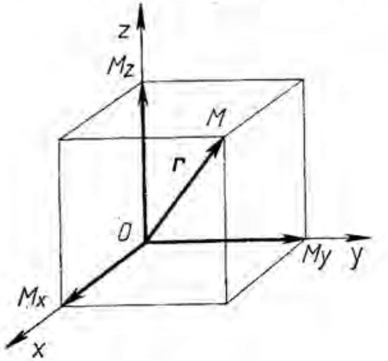


Рис. 3.2

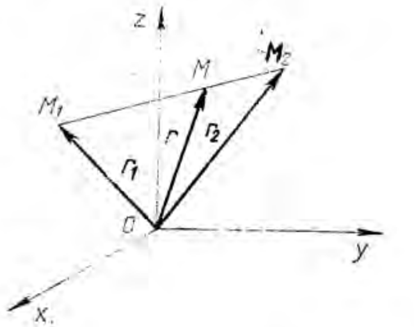


Рис. 3.3

Радиус-вектор точки $M(x, y, z)$, делящей отрезок M_1M_2, где $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, в данном отношении $\lambda = m_2/m_1$, выражается формулой

$$\mathbf{r} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \text{ или } \mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}_1 + \lambda\mathbf{r}_2}{1 + \lambda},$$

где $\mathbf{r}_1 = \overline{OM_1}$; $\mathbf{r}_2 = \overline{OM_2}$. Координаты точки M определяют по формулам:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda},\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda},\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Если M — середина отрезка M_1M_2, то

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2},\ z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \tag{3.3}$$

Если $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — единичные взаимно перпендикулярные векторы (*орты*) координатных осей Ox, Oy, Oz, то вектор $\mathbf{a} = (X, Y, Z)$ можно представить в виде

$$\mathbf{a} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}. \tag{3.4}$$

Векторы $\mathbf{a}_x = X\mathbf{i}$, $\mathbf{a}_y = Y\mathbf{j}$, $\mathbf{a}_z = Z\mathbf{k}$ называются *составляющими* или *компонентами вектора* (3.4)

Длина вектора (3.4) вычисляется по формуле

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}. \tag{3.5}$$

Направляющими косинусами вектора называются косинусы углов α, β, γ, образованных этим вектором с осями координат Ox, Oy, Oz.

Для направляющих косинусов вектора выполняется равенство

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Координаты вектора (3.4) через направляющие косинусы выражаются формулами:

$$X = |\mathbf{a}|\cos\alpha,\ Y = |\mathbf{a}|\cos\beta,\ Z = |\mathbf{a}|\cos\gamma. \tag{3.6}$$

Координаты единичного вектора равны его направляющим косинусам.

Примеры. 1. Начало вектора находится в точке $M(4, -3, 5)$, конец — в точке $N(6, -2, 3)$. Найти координаты вектора $\overline{MN}$, его длину и направляющие косинусы.

Обозначим координаты вектора через X, Y, Z. По формулам (3.2) находим:

$$X = x_2 - x_1 = 6 - 4 = 2,\ Y = y_2 - y_1 = -2 - (-3) = 1,$$
$$Z = z_2 - z_1 = 3 - 5 = -2,$$

т. е. $\overline{MN} = (2, 1, -2)$.

По формуле (3.5) вычислим длину вектора:

$$|\overline{MN}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = 3.$$

Формулы (3.6) дают возможность определить направляющие косинусы вектора:

$$\cos\alpha = \frac{X}{|\mathbf{a}|},\ \cos\beta = \frac{Y}{|\mathbf{a}|},\ \cos\gamma = -\frac{Z}{|\mathbf{a}|}.$$

Подставляя в эти формулы значения координат вектора и его длины, находим:

$$\cos\alpha = \frac{2}{3},\ \cos\beta = \frac{1}{3},\ \cos\gamma = -\frac{2}{3}.$$

2. Даны векторы $\mathbf{a} = (1, 1, -1)$, $\mathbf{b} = (2, -1, 3)$, $\mathbf{c} = (1, -2, 1)$. Разложить вектор $\mathbf{d} = (12, -9, 11)$ по векторам $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$.

Пусть $\mathbf{d} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$, где α, β, γ — некоторые коэффициенты. Так как равные векторы имеют равные координаты и координаты линейной комбинации равны соответствующим линейным комбинациям одноименных координат, то

$$\left.\begin{aligned} 12 &= \alpha + 2\beta + \gamma, \\ -9 &= \alpha - \beta - 2\gamma, \\ 11 &= -\alpha + 3\beta + \gamma. \end{aligned}\right\}$$

Решив эту систему уравнений, найдем: $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $\gamma = 4$.

Итак, $\mathbf{d} = 2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} + 4\mathbf{c}$.

3.1. Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ перпендикулярны, причем $|\mathbf{a}| = 4$, $|\mathbf{b}| = 3$. Найти $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$; $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$.

3.2. Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ образуют угол $\varphi = 60°$. Найти $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$ и $|\mathbf{b} - \mathbf{a}|$, если известно, что $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 2$.

3.3. Дан прямоугольник $ABCD$. Среди векторов $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{AD}$, $\overline{AC}$ и $\overline{DB}$ указать коллинеарные и равные.

3.4. Даны векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Построить векторы: $2\mathbf{a}$; $-4\mathbf{b}$; $\sqrt{2}\mathbf{b} - \sqrt{3}\mathbf{a}$; $3\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$; $2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$; $4\mathbf{b} - 3\mathbf{a}$; $-2\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$.

3.5. Какому условию должны удовлетворять три вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, чтобы из них можно было образовать треугольник?

3.6. В треугольнике ABC проведена медиана AA'. Выразить вектор $\overline{AA'}$ через векторы $\overline{BC} = \mathbf{a}$ и $\overline{BA} = \mathbf{c}$.

3.7. Доказать, что можно построить треугольник, стороны которого равны и параллельны медианам данного треугольника ABC.

3.8. В треугольнике ABC проведена медиана AA'. Выразить вектор $\overline{AA'}$ через векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$.

3.9. Точки E и F служат серединами сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$. Доказать, что $\overline{FE} = \frac{1}{2}(\overline{BC} + \overline{AD})$.

3.10. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD угла A. Выразить вектор $\overline{AD}$ через векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$.

3.11. Доказать, что сумма векторов, идущих из центра правильного шестиугольника к его вершинам, есть нуль-вектор. Верно ли аналогичное утверждение для произвольного правильного многоугольника?

3.12. Дана трехгранная пирамида $SABC$. Доказать, что три отрезка, соединяющих середины боковых ребер с серединами противоположных сторон основания, проходят через одну точку и делятся в ней пополам.

3.13. Даны радиусы-векторы $\mathbf{r}_1 = \overline{OM}_1$ и $\mathbf{r}_2 = \overline{OM}_2$ концов отрезка $\overline{M_1M_2}$. Найти радиус-вектор точки M, делящей отрезок пополам.

3.14. Даны радиусы-векторы $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ вершин треугольника. Найти радиус-вектор точки пересечения его медиан.

3.15. Даны радиусы-векторы $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ трех последовательных вершин параллелограмма. Найти радиус-вектор $\mathbf{r}$ точки пересечения диагоналей параллелограмма.

3.16. В точках $M_1(\mathbf{r}_1)$, $M_2(\mathbf{r}_2)$, ..., $M_n(\mathbf{r}_n)$ помещены массы m_1, m_2, ..., m_n. Найти радиус-вектор центра тяжести этой системы материальных точек.

3.17. Найти проекции вектора $\mathbf{a}$ на ось Ou, образующую с ним угол φ, в каждом из указанных случаев:

1) $|\mathbf{a}| = 4$, $\varphi = 0°$; 2) $|\mathbf{a}| = 3$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$; 3) $|\mathbf{a}| = 5$, $\varphi = \pi$;

4) $|\mathbf{a}| = 6$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$; 5) $|\mathbf{a}| = \sqrt{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$; 6) $|\mathbf{a}| = 2$, $\varphi = \frac{3}{4}\pi$.

3.18. Найти координаты вектора $\mathbf{a}$, если известны углы α, β, γ, образуемые им с осями Ox, Oy, Oz прямоугольной декартовой системы координат, и его длина:

1) $|\mathbf{a}| = 4$, $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$, $\gamma = 60°$;
2) $|\mathbf{a}| = 8$, $\alpha = 135°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 60°$;
3) $|\mathbf{a}| = 2$, $\alpha = 120°$, $\beta = 45°$, $\gamma = 120°$;
4) $|\mathbf{a}| = 6$, $\alpha = 120°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 45°$.

3.19. Найти координаты и составляющие следующих векторов: 1) $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$; 2) $\mathbf{b} = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$; 3) $\mathbf{c} = -8\mathbf{i} + 9\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

3.20. Даны векторы: $\mathbf{a} = (1, -2, 3)$, $\mathbf{b} = (2, 1, 4)$, $\mathbf{c} = (-3, 4, 5)$. Найти векторы: $3\mathbf{a}$; $2\mathbf{b}$; $-3\mathbf{c}$; $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$; $2\mathbf{a} - 3\mathbf{b} + 4\mathbf{c}$.

3.21. Найти координаты вектора M_1M_2 и его длину в каждом из следующих случаев:

1) $M_1(4, -5, 2)$, $M_2(2, -3, 1)$; 2) $M_1(7, 3, -2)$, $M_2(4, 3, 2)$;
3) $M_1(9, 4, -3)$, $M_2(3, -4, -3)$; 4) $M_1(1, 5, -7)$, $M_2(6, 5, 5)$;
5) $M_1(3, -2, 2)$, $M_2(-1, 0, 2)$; 6) $M_1(3, 2, 0)$, $M_2(5, 3, -1)$.

3.22. Дан треугольник с вершинами $A(7, 5, -4)$, $B(4, 9, 1)$, $C(6, -3, -7)$. Вычислить длину медианы, проведенной из вершины A, и периметр треугольника.

3.23. Найти координаты и длину радиуса-вектора точки M пересечения медиан треугольника, вершины которого находятся в точках $A(9, 3, -5)$, $B(8, -2, 3)$, $C(-11, 2, -4)$

3.24. Проверить, является ли четырехугольник с вершинами в точках $A(1, 1, 1)$, $B(4, 4, 1)$, $C(7, 1, 1)$, $D(4, -2, 1)$ квадратом.

3.25. Точки $A(9, -11, 5)$, $B(7, 4, -2)$, $C(-7, 13, -3)$ являются последовательными вершинами ромба. Найти четвертую вершину D. Вычислить периметр ромба и длины его диагоналей.

3.26. Дан треугольник с вершинами $A(-2, 1, 3)$, $B(0, 3, 4)$, $C(1, 5, 3)$. Вычислить длину биссектрисы внутреннего угла A.

3.27. Найти координаты концов отрезка, который точками $M(3, -2, 2)$, $N(5, -5, 3)$ разделен на три равные части.

3.28. Три силы: $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, приложенные к одной точке, имеют взаимно перпендикулярные направления. Определить величину их равнодействующей $\mathbf{F}$, если известно, что $|\mathbf{F}_1| = 22$ Н, $|\mathbf{F}_2| = 20$ Н, $|\mathbf{F}_3| = 4$ Н.

3.29. Даны проекции силы $\mathbf{F}$ на координатные оси: $X = 5$, $Y = 5\sqrt{2}$, $Z = -5$. Найти величину силы $\mathbf{F}$ и направление ее действия.

3.30. На точку действуют три силы, заданные проекциями на оси прямоугольной декартовой системы координат: $\mathbf{F}_1 = (2, -1, 3)$, $\mathbf{F}_2 = (-1, -2, -2)$, $\mathbf{F}_3 = (3, -1, 1)$. Найти величину и направление их равнодействующей.

3.2. Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла φ между ними:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\varphi.$$

Скалярное произведение обозначают также $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ и $\mathbf{ab}$. С учетом формулы (3.1) получаем:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,\text{пр}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{b}|\,\text{пр}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}.$$

Свойства скалярного произведения: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$; $\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$; $(\alpha\mathbf{a})\mathbf{b} = \alpha(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$; $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}^2 = |\mathbf{a}|^2$.

Если векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ заданы своими координатами:

$$\mathbf{a} = (X_1, Y_1, Z_1), \quad \mathbf{b} = (X_2, Y_2, Z_2), \tag{3.7}$$

то

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2, \tag{3.8}$$

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|} = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}\sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}.$$

Необходимое и достаточное условие перпендикулярности векторов (3.7) выражается равенством

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \tag{3.9}$$

или $X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 = 0$.

Проекция вектора $\mathbf{s} = (X, Y, Z)$ на ось Ou, образующую с координатными осями Ox, Oy, Oz углы α, β, γ соответственно, вычисляется по формуле

$$\text{пр}_u \mathbf{s} = X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma.$$

Примеры. 1. Дан четырехугольник с вершинами $A(7, -8, 4)$, $B(7, 4, -2)$, $C(-5, 10, -2)$, $D(-5, -2, 4)$. Доказать, что его диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны.

Для доказательства достаточно найти координаты векторов $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, выразить их скалярное произведение в координатах и убедиться в выполнении равенства (3.9).

С помощью формул (3.2) находим:

$$\overline{AC} = (-12, 18, -6), \quad \overline{BD} = (-12, -6, 6).$$

Так как

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = (-12)(-12) + 18(-6) + (-6)6 = 144 - 108 - 36 = 0,$$

то $\overline{AC} \perp \overline{BD}$, что и требовалось доказать.

2. Какой угол образуют единичные векторы $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$, если известно, что векторы $\mathbf{p} = 3\mathbf{m} + 6\mathbf{n}$ и $\mathbf{q} = 10\mathbf{m} - 8\mathbf{n}$ взаимно перпендикулярны?

Поскольку $\mathbf{p} \perp \mathbf{q}$, то $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = 0$. Найдем выражение для скалярного произведения, воспользовавшись его свойствами:

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = (3\mathbf{m} + 6\mathbf{n})(10\mathbf{m} - 8\mathbf{n}) = 30\mathbf{m}^2 - 24\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} + 60\mathbf{n} \cdot \mathbf{m} - 48\mathbf{n}^2.$$

По условию $|\mathbf{m}| = 1$, $|\mathbf{n}| = 1$, поэтому $\mathbf{m}^2 = 1$, $\mathbf{n}^2 = 1$. Далее, по определению $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = |\mathbf{m}||\mathbf{n}|\cos\theta$, где θ — искомый угол между векторами $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$.

Следовательно,

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = 30 - 24\cos\theta + 60\cos\theta - 48 = 0; \quad 36\cos\theta - 18 = 0$$

или $\cos\theta = 1/2$, откуда $\theta = \pi/3$.

3.31. Вычислить скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, образующих угол φ в каждом из следующих случаев:

1) $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 5$, $\varphi = 0$; 2) $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 4$, $\varphi = \pi/3$;

3) $|\mathbf{a}| = 7$, $|\mathbf{b}| = 9$, $\varphi = \pi/2$; 4) $|\mathbf{a}| = 6$, $|\mathbf{b}| = \sqrt{2}$, $\varphi = 3\pi/4$.

3.32. Вычислить скалярное произведение векторов, заданных своими координатами:

1) $\mathbf{a} = (4, -3)$, $\mathbf{b} = (2, 1)$; 2) $\mathbf{a} = (5, -6)$, $\mathbf{b} = (3, 2)$;

3) $\mathbf{a} = (1, -3, 4)$, $\mathbf{b} = (5, 1, 2)$; 4) $\mathbf{a} = (6, -2, 1)$, $\mathbf{b} = (1, 8, -3)$;

5) $\mathbf{a} = (7, -3, 9)$, $\mathbf{b} = (3, 7, 0)$; 6) $\mathbf{a} = (4, 2, -5)$, $\mathbf{b} = (2, 6, 4)$.

3.33. Найти углы между векторами, заданными координатами:

1) $\mathbf{a} = (5, 6)$, $\mathbf{b} = (6, -5)$; 2) $\mathbf{a} = (3, 4)$, $\mathbf{b} = (5, 12)$;

3) $\mathbf{a} = (4, -10, 1)$, $\mathbf{b} = (11, -8, -7)$;

4) $\mathbf{a} = (2, 1, -2)$, $\mathbf{b} = (2, 4, 4)$.

3.34. Дан четырехугольник с вершинами в точках $A(1, -3, 5)$, $B(-2, 4, 1)$, $C(6, -1, -3)$, $D(5, 6, -8)$. Найти скалярные произведения:

1) $\overline{AB} \cdot \overline{BC}$; 2) $\overline{BC} \cdot \overline{CD}$; 3) $\overline{CD} \cdot \overline{BA}$; 4) $\overline{AC} \cdot \overline{BD}$; 5) $\overline{AC} \cdot \overline{AD}$

3.35. Найти внутренние углы треугольника с вершинами $A(1, 7, 2)$, $B(5, -3, 3)$, $C(12, -1, -5)$.

3.36. Вычислить проекцию вектора $\mathbf{a} = (1, -2, 2)$ на ось вектора $\mathbf{b} = (2, 10, 11)$.

3.37. Даны два вектора: $\mathbf{a} = (10, 2, -11)$, $\mathbf{b} = (-2, 1, -2)$. Вычислить проекцию каждого из них на ось другого вектора.

3.38. Даны три вектора: $\mathbf{a} = 7\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$. Вычислить $\text{пр}_{\mathbf{c}}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$.

3.39. Даны три вектора: $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} - 9\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 7\mathbf{i} + \mathbf{j} - 6\mathbf{k}$. Вычислить $\text{пр}_{\mathbf{b}+\mathbf{c}}\mathbf{a}$.

3.40. Найти вектор $\mathbf{x}$, коллинеарный вектору $\mathbf{a} = (1, -2, 2)$ и удовлетворяющий условию $\mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = -18$.

3.41. Даны два вектора: $\mathbf{a} = (2, 3, -5)$, $\mathbf{b} = (4, 5, -6)$. Найти вектор $\mathbf{x}$, зная, что он перпендикулярен оси Oz и удовлетворяет условиям: $\mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = 2$, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{b} = 8$.

3.42. Даны три вектора: $\mathbf{a} = (1, 2, 2)$, $\mathbf{b} = (4, -2, -5)$, $\mathbf{c} = (6, -1, 3)$. Найти вектор $\mathbf{x}$, удовлетворяющий условиям: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = 3$, $\mathbf{b} \cdot \mathbf{x} = 5$, $\mathbf{c} \cdot \mathbf{x} = 1$.

3.43. Даны единичные векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, удовлетворяющие условию $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0$. Вычислить $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{a}$.

3.44. Доказать, что вектор $\mathbf{p} = \mathbf{b} - \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})/a^2$ перпендикулярен вектору $\mathbf{a}$.

3.45. Определить, при каком значении α векторы $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \alpha\mathbf{k}$ и $\mathbf{b} = \alpha\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ перпендикулярны.

3.46. Даны вершины треугольника $A(1, -1, 5)$, $B(-2, -1, 1)$, $C(5, -1, 2)$. Найти внешний угол при вершине B.

3.47. Дан треугольник с вершинами $A(4, 3, -1)$, $B(6, 2, 0)$, $C(2, -1, 2)$. Доказать, что внутренние углы при вершинах A и B равны между собой.

3.48. Вычислить работу, производимую силой $\mathbf{F} = (8, 4, -6)$ при перемещении ее точки приложения из начала в конец вектора $\mathbf{s} = (5, -3, 2)$.

3.49. Вычислить работу, производимую силой $\mathbf{F} = (4, 7, -1)$ при прямолинейном перемещении точки ее приложения из $A(3, 5, 9)$ в $B(4, 8, 11)$.

3.50. Три силы $\mathbf{F}_1 = (1, -3, 4)$, $\mathbf{F}_2 = (2, 6, -5)$, $\mathbf{F}_3 = (7, -8, 9)$ приложены в одной точке. Вычислить, какую работу производит равнодействующая этих сил, когда ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения $A(3, -2, 4)$ в положение $B(6, 8, 7)$.

3.51. Дан треугольник с вершинами $A(-1, 2, 4)$, $B(1, 4, 5)$, $C(2, 6, 4)$. Найти единичный вектор направления биссектрисы AN этого треугольника; вычислить длину биссектрисы AN.

3.3. Векторное произведение векторов

Векторным произведением вектора $\mathbf{a}$ на вектор $\mathbf{b}$ называется вектор, обозначаемый символом $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ и удовлетворяющий следующим условиям:

1) $|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\varphi$, где φ — угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$;
2) вектор $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ перпендикулярен каждому из векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$;
3) тройка векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ имеет ту же ориентацию, что и тройка единичных координатных векторов $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ (рис. 3.4).

В дальнейшем будем полагать, что тройка **i**, **j**, **k** является правой.

Векторное произведение обозначают также [**ab**] и **a** × **b**.

Модуль векторного произведения [**a**, **b**] равен площади S параллелограмма, построенного на векторах **a** и **b** (рис. 3.5):

$$|[\mathbf{a},\ \mathbf{b}]| = S. \tag{3.10}$$

Векторное произведение векторов **a** и **b** можно представить в виде [**a**, **b**] = S**e**, где **e** — орт векторного произведения [**a**, **b**].

Векторное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда векторы **a** и **b** коллинеарны: [**a**, **b**] = 0, если **b** = α**a**.

Если векторы **a** и **b** заданы своими координатами: **a** = $(X_1,\ Y_1,\ Z_1)$, **b** = $(X_2,\ Y_2,\ Z_2)$, то

$$[\mathbf{a},\ \mathbf{b}] = \left(\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}\right). \tag{3.11}$$

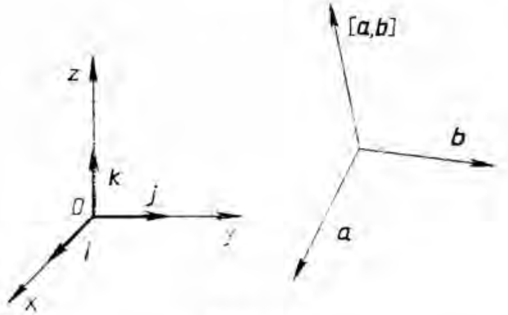


Рис. 3.4

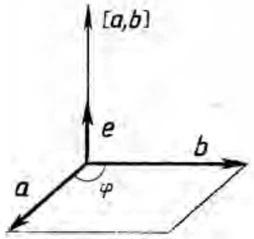


Рис. 3.5

Примеры. 1. Дан треугольник с вершинами $A(-1,\ 1,\ 5)$, $B(3,\ -4,\ 5)$, $C(-1,\ 5,\ 2)$. Найти длину высоты, проведенной из вершины B к стороне AC.

Чтобы решить задачу, достаточно вычислить площадь треугольника ABC и длину стороны AC. Площадь треугольника ABC равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$. Находим координаты этих векторов и координаты их векторного произведения:

$$\overline{AB} = (4,\ -5,\ 0),\ \overline{AC} = (0,\ 4,\ -3),\ [\overline{AB},\ \overline{AC}] = (15,\ 12,\ 16).$$

(При нахождении координат векторного произведения использована формула (3.11).)

По формуле (3.10) находим площадь параллелограмма:

$$S = |[\overline{AB},\ \overline{AC}]| = \sqrt{15^2 + 12^2 + 16^2} = 25.$$

Так как $|\overline{AC}| = \sqrt{0 + 4^2 + (-3)^2} = 5$ и $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}S$, $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}|\overline{AC}|\,h$, то $S = |\overline{AC}|\,h$, откуда $h = 5$.

2. Сила **F** = (−4, 2, 4) приложена в точке $M(3,\ 4,\ -2)$. Найти величину и направляющие косинусы момента этой силы относительно начала координат.

Если **a** = $\overline{OM}$, то [**a**, **F**] — момент силы **F** относительно точки O. Применяя формулу (3.11), получаем [**a**, **F**] = (20, −4, 22). Следовательно,

$$|[a,\ \mathbf{F}]| = \sqrt{20^2 + 4^2 + 22^2} = 30;$$

$$\cos\alpha = \frac{20}{30} = \frac{2}{3},\ \cos\beta = \frac{-4}{30} = \frac{-2}{15},\ \cos\gamma = \frac{22}{30} = \frac{11}{15}.$$

3.52. Найти векторное произведение [**a**, **b**] в каждом из следующих случаев:

1) **a** = 7**i** + 4**j** + 6**k**, **b** = **i** + 2**j** − 2**k**;
2) **a** = 2**i** + 11**j** − 10**k**, **b** = 3**i** + 6**j** − 2**k**;
3) **a** = (1, 2, −2), **b** = (8, 6, 4);
4) **a** = (1, −5, 8), **b** = (3, 6, −2).

3.53. Упростить выражения:

1) [(3**a** − 4**b**), (2**a** + 5**b**)]; 2) [(5**a** − 3**b** + 2**c**), (4**a** + 7**b** − 6**c**)];
3) [(2**i** − 3**j** + 4**k**), (4**i** + 5**j** − 6**k**)].

3.54. Доказать коллинеарность векторов:

1) [**a**, **b**] и [3**a**, (5**b** − 2**a**)]; 2) [**b**, **c**] и [4**b**, (3**c** + 7**b**)].

3.55. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах **a** = (2, 1, 2), **b** = (3, −4, 2).

3.56. Вычислить площадь параллелограмма, три последовательные вершины которого находятся в точках $A(7,-5,6)$, $B(9,-4,8)$, $C(6,0,6)$.

3.57. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(1,\ 1,\ 3)$, $B(3,\ -1,\ 6)$, $C(5,\ 1,\ -3)$.

3.58. Дан треугольник с вершинами $A(3,\ -4,\ 5)$, $B(5,\ -3,\ 7)$, $C(6,\ -8,\ 7)$. Найти длину высоты, проведенной из вершины C к стороне AB.

3.59. Найти расстояние от точки $C(4,\ -1,\ 2)$ до прямой, проходящей через точки $A(1,\ 3,\ 4)$, $B(3,\ 4,\ 2)$.

3.60. Найти синус угла между векторами **a** и **b**:

1) **a** = (2, −4, 4), **b** = (2, 1, −2);
2) **a** = (2, 1, −2), **b** = (6, −3, 2);
3) **a** = (2, 2, 1), **b** = (11, 10, 2); 4) **a** = (2, 1, 2), **b** = (−2, 2, 1).

3.61. Даны три вектора: **a** = (1, 2, 2), **b** = (2, 3, 4), **c** = (5, 1, 3). Найти [[**a**, **b**], **c**] и [**a**, [**b**, **c**]].

3.62. Векторы **a**, **b** и **c** удовлетворяют условию **a** + **b** + **c** = **0**. Доказать, что [**a**, **b**] = [**b**, **c**] = [**c**, **a**].

3.63. Векторы **a**, **b**, **c** и **d** связаны соотношениями [**a**, **b**] = [**c**, **d**], [**a**, **c**] = [**b**, **d**]. Доказать, что **a** − **d** и **b** − **c** коллинеарны.

В задачах 3.64—3.68 доказать тождество.

3.64. $[\mathbf{a},\ \mathbf{b}]^2 + (\mathbf{a},\ \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2\mathbf{b}^2$.

3.65. [[**a**, **b**], **c**] = **b**(**a**, **c**) − **a**(**b**, **c**); [**a**, [**b**, **c**]] = **b**(**a**, **c**) − **c**(**a**, **b**).

3.66. [**a**, **b**][**c**, **d**] = (**a**, **c**) (**b**, **d**) − (**a**, **d**) (**b**, **c**).

3.67. [**a**, [**b**, **c**]] + [**b**, [**c**, **a**]] + [**c**, [**a**, **b**]] = **0**.

3.68. $(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)^2 = (x_1y_2 - x_2y_1)^2 + (y_1z_2 - z_1y_2)^2 + (z_1x_2 - x_1z_2)^2$.

3.69. Сила **F** = (4, −3, −7) приложена в точке $A(1,\ 6,\ 5)$. Найти момент этой силы относительно начала координат.

3.70. Сила **F** = (2, 4, 6) приложена в точке $A(3,\ -5,\ 7)$. Найти момент этой силы относительно точки $B(1,\ -8,\ 9)$.

3.71. Сила $\mathbf{F} = (3, -4, 2)$ приложена в точке $A(2, 1, 2)$. Найти величину и направляющие косинусы момента этой силы относительно начала координат.

3.72. Сила $\mathbf{F} = (2, -2, -3)$ приложена в точке $A(4, 5, 6)$. Найти величину и направляющие косинусы момента этой силы относительно точки $C(2, 3, -3)$.

3.73. В точке $A(1, 3, 3)$ приложены три силы: $\mathbf{F}_1 = (2, -4, 8)$, $\mathbf{F}_2 = (3, 1, -7)$, $\mathbf{F}_3 = (-8, 7, 1)$. Найти величину и направляющие косинусы момента этой силы относительно точки $C(-1, 2, 5)$.

3.4. Смешанное произведение векторов

Смешанным произведением трех векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ на вектор $\mathbf{c}$, т. е. $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \cdot \mathbf{c}$.

Смешанное произведение $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \cdot \mathbf{c}$ равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, взятому со знаком плюс, если тройка $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ правая, и со знаком минус, если эта тройка левая (предполагается, что тройка $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — правая).

Поскольку выполняется тождество $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot [\mathbf{b}, \mathbf{c}]$, для обозначения смешанного произведения трех векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ употребляется запись $\mathbf{abc}$.

Свойства смешанного произведения векторов:

$$\mathbf{abc} = \mathbf{bca} = \mathbf{cab} = -\mathbf{bac} = -\mathbf{acb} = -\mathbf{cba},$$
$$\mathbf{ab}(\mathbf{c} + \mathbf{d}) = \mathbf{abc} + \mathbf{abd}, \quad (\alpha\mathbf{a})\mathbf{bc} = \alpha(\mathbf{abc}).$$

Если векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ заданы своими прямоугольными координатами:

$$\mathbf{a} = (X_1, Y_1, Z_1), \quad \mathbf{b} = (X_2, Y_2, Z_2), \quad \mathbf{c} = (X_3, Y_3, Z_3), \tag{3.12}$$

то их смешанное произведение вычисляется по формуле

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}. \tag{3.13}$$

Необходимое и достаточное условие компланарности векторов (3.12) выражается равенством

$$\mathbf{abc} = 0, \tag{3.14}$$

или

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Примеры. 1. Даны три вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. Найти смешанное произведение $(\mathbf{a} + \mathbf{b})(\mathbf{b} + \mathbf{c})(\mathbf{c} + \mathbf{a})$.

Воспользовавшись свойствами смешанного произведения, получим

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})(\mathbf{b} + \mathbf{c})(\mathbf{c} + \mathbf{a}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b})(\mathbf{b} + \mathbf{c})\mathbf{c} + (\mathbf{a} + \mathbf{b})(\mathbf{b} + \mathbf{c})\mathbf{a} =$$
$$= (\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{bc} + (\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{cc} + (\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{ba} + (\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{ca} =$$
$$= \mathbf{abc} + \mathbf{bbc} + \mathbf{acc} + \mathbf{bcc} + \mathbf{aba} + \mathbf{bba} + \mathbf{aca} + \mathbf{bca}.$$

Так как смешанное произведение векторов, среди которых имеются равные,— нуль (соответствующие три вектора в этом случае компланарны), то в полученной сумме отличен от нуля только член $\mathbf{bca} = \mathbf{abc}$, повторяющийся дважды.

Следовательно, $(\mathbf{a} + \mathbf{b})(\mathbf{b} + \mathbf{c})(\mathbf{c} + \mathbf{a}) = 2\mathbf{abc}$.

2. Доказать, что точки $A(-1, 2, 1)$, $B(-3, 1, 2)$, $C(3, -2, 2)$ и $D(3, -4, 3)$ лежат в одной плоскости.

Рассмотрим три вектора, начало каждого из которых находится в точке A, а концы — соответственно в точках B, C и D:

$$\overline{AB} = (-2, -1, 1); \quad \overline{AC} = (4, -4, 1), \quad \overline{AD} = (4, -6, 2).$$

По формуле (3.13) вычислим их смешанное произведение:

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD} = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 4 & -4 & 1 \\ 4 & -6 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 6 & -3 & 1 \\ 8 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 8 & -4 \end{vmatrix} = 0.$$

Так как выполнено условие (3.14), то векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ компланарны. Следовательно, точки A, B, C и D лежат в одной плоскости.

3.74. Определить, какой тройкой (правой или левой) является тройка $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ в каждом из следующих случаев:

1) $\mathbf{a} = \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = \mathbf{k}$, $\mathbf{c} = \mathbf{i}$; 2) $\mathbf{a} = \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{j}$, $\mathbf{c} = \mathbf{i}$;
3) $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{c} = \mathbf{k}$; 4) $\mathbf{a} = \mathbf{i}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{c} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$;
5) $\mathbf{a} = \mathbf{k} + \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = \mathbf{k}$, $\mathbf{c} = \mathbf{i}$; 6) $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i}$, $\mathbf{c} = \mathbf{k}$.

3.75. Вычислить смешанное произведение $\mathbf{abc}$:

1) $\mathbf{a} = (-4, -3, -9)$, $\mathbf{b} = (1, 0, -1)$, $\mathbf{c} = (-5, -4, 3)$;
2) $\mathbf{a} = (1, 2, 1)$, $\mathbf{b} = (1, 2, -2)$, $\mathbf{c} = (8, 6, 4)$;
3) $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{b} = (3, 1, 2)$, $\mathbf{c} = (2, 3, 1)$;
4) $\mathbf{a} = (9, 7, 8)$, $\mathbf{b} = (6, 4, 5)$, $\mathbf{c} = (1, 2, 3)$.

3.76. Определить, какой тройкой является тройка $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$:

1) $\mathbf{a} = (1, -1, 2)$, $\mathbf{b} = (-2, 1, 1)$, $\mathbf{c} = (1, -2, 2)$;
2) $\mathbf{a} = (1, 2, 1)$, $\mathbf{b} = (2, 1, 1)$, $\mathbf{c} = (1, 1, 2)$;
3) $\mathbf{a} = (3, -2, -1)$, $\mathbf{b} = (2, -3, 1)$, $\mathbf{c} = (1, -2, -3)$;
4) $\mathbf{a} = (1, 4, 3)$, $\mathbf{b} = (2, -5, 1)$, $\mathbf{c} = (1, -3, 2)$;
5) $\mathbf{a} = (13, 12, 11)$, $\mathbf{b} = (24, 23, 22)$, $\mathbf{c} = (35, 34, 33)$.

3.77. Выяснить, компланарны ли векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$:

1) $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 7\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$;
2) $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 8\mathbf{i} + 9\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$;
3) $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$;
4) $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 7\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 8\mathbf{i} + \mathbf{j} + 8\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

3.78. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$:

1) $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$;
2) $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$;
3) $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$;
4) $\mathbf{a} = 2\mathbf{p} + 3\mathbf{q}$, $\mathbf{b} = \mathbf{p} - 4\mathbf{q}$, $\mathbf{c} = 3\mathbf{p} + 5\mathbf{q}$, где $|\mathbf{p}| = 1/2$; $|\mathbf{q}| = 4$; $\varphi = (\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 45°$.

3.79. Найти объем треугольной пирамиды $M_1M_2M_3M_4$ с вершинами в точках $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, $M_4(x_4, y_4, z_4)$.

3.80. Найти необходимое и достаточное условие расположения в одной плоскости четырех точек: $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, $M_4(x_4, y_4, z_4)$.

3.81. Вычислить объем треугольной пирамиды $ABCD$:

1) $A(6, 1, 4)$, $B(2, -2, -5)$, $C(7, 1, 3)$, $D(1, -3, 7)$;

2) $A(1, 2, 6)$, $B(0, 3, 8)$, $C(-5, -1, 4)$, $D(-3, 2, -6)$.

3.82. Доказать, что точки A, B, C, D лежат в одной плоскости:

1) $A(-1, 2, 1)$, $B(-3, 1, 2)$, $C(3, -2, 2)$, $D(3, -4, 3)$;

2) $A(9, -11, 5)$, $B(7, 4, -2)$, $C(-7, 13, -3)$, $D(1, 1, 1)$.

3.83. Вершины треугольной пирамиды находятся в точках $A(2, 1, 1)$, $B(6, -2, 2)$, $C(4, 3, 2)$, $D(-6, 8, 7)$. Вычислить длину высоты, проведенной из вершины D.

3.84. Треугольная пирамида $ABCD$ имеет объем $V = 2$, три ее вершины находятся в точках $A(2, 1, 3)$, $B(3, 3, 2)$, $C(1, 2, 4)$. Найти координаты четвертой вершины D, если известно, что она лежит на оси Oz.

3.85. Треугольная пирамида $ABCD$ имеет объем $V = 3$, три ее вершины находятся в точках $A(1, 2, 3)$, $B(3, 1, 2)$, $C(2, 3, 1)$. Найти координаты четвертой вершины D, если известно, что она лежит на оси Ox.

3.86. Доказать тождество $\mathbf{ab}(\mathbf{c} + \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) = \mathbf{abc}$, где α и β — любые числа.

3.87. Векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ удовлетворяют условию $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] + [\mathbf{b}, \mathbf{c}] + [\mathbf{c}, \mathbf{a}] = 0$. Доказать, что они компланарны.

3.88. Доказать, что равенство $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} = 0$, где по крайней мере одно из чисел α, β, γ отлично от нуля, выражает необходимое и достаточное условие компланарности векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$.

4. ПЛОСКОСТЬ И ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Уравнением плоскости (в фиксированной системе координат) называется такое уравнение с тремя переменными, которому удовлетворяют координаты любой точки данной плоскости, и только они.

Плоскость определяется линейным уравнением относительно декартовых координат, а прямая в пространстве — двумя такими уравнениями.

4.1. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку и имеющей данный нормальный вектор. Общее уравнение плоскости. Уравнение плоскости в отрезках

Нормальным вектором плоскости называется всякий (отличный от нуля) вектор, перпендикулярный к этой плоскости.

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и имеющей нормальный вектор $\mathbf{n} = (A, B, C)$, в векторном виде записывается так:

$$\mathbf{n}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0,$$

где $\mathbf{r}_0$ — радиус-вектор точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$; $\mathbf{r}$ — радиус-вектор произвольной точки $M(x, y, z)$ данной плоскости (рис. 4.1).

В декартовых координатах это уравнение принимает вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \qquad (4.1)$$

или

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (4.2)$$

где $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$.

Уравнение (4.2) называется *общим уравнением плоскости*.

В уравнениях (4.1) и (4.2) коэффициенты A, B, C одновременно в нуль не обращаются (так как $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$).

Если все коэффициенты уравнения (4.2) отличны от нуля, его можно преобразовать к виду

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \qquad (4.3)$$

где $a = -D/A$, $b = -D/B$, $c = -D/C$ — величины направленных отрезков, отсекаемых на осях координат. Уравнение (4.3) называется *уравнением плоскости в отрезках*.

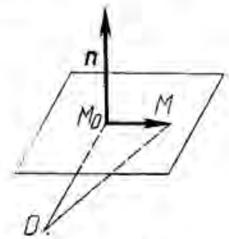


Рис. 4.1

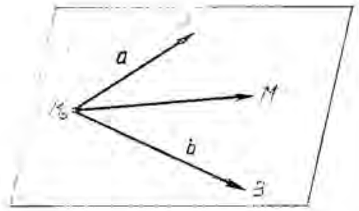


Рис. 4.2

Примеры. 1. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1, \sqrt{2}, -3)$, нормальный вектор которой образует с осями Ox, Oy, Oz прямоугольной декартовой системы координат углы $\alpha = 60°$, $\beta = 135°$, $\gamma = 120°$.

Найдем сначала координаты нормального вектора плоскости. В качестве нормального вектора возьмем единичный вектор $\mathbf{n}_0$, тогда его координаты будут равны направляющим косинусам, т. е. $\mathbf{n}_0 = (1/2, -\sqrt{2}/2, -1/2)$. В соответствии с формулой (4.1) получаем

$$\frac{1}{2}(x - 1) - \frac{\sqrt{2}}{2}(y - \sqrt{2}) - \frac{1}{2}(z + 3) = 0$$

или $x - \sqrt{2}y - z - 2 = 0$.

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и параллельной двум неколлинеарным векторам $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Записать уравнение для случая, когда $M_0(2, -1, 5)$, $\mathbf{a} = (1, 2, -3)$, $\mathbf{b} = (3, 1, 6)$.

Из точки M_0 отложим векторы $\overline{M_0A} = \mathbf{a}$ и $\overline{M_0B} = \mathbf{b}$ (рис 4.2). Точки M_0, A и B определяют единственную искомую плоскость. В этой плоскости возьмем произвольную точку $M(x, y, z)$ и рассмотрим вектор $\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$. Векторы $\overline{M_0M}$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ компланарны, поэтому их смешанное произведение равно нулю, т. е. $\overline{M_0M}\,\mathbf{ab} = 0$.

Полученное уравнение и является искомым. В координатах оно имеет вид

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

В частном случае, когда $M_0(2, -1, 5)$, $\mathbf{a} = (1, 2, -3)$, $\mathbf{b} = (3, 1, 6)$, получаем следующее уравнение плоскости:

$$\begin{vmatrix} x - 2 & y + 1 & z - 5 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$(x-2)\begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & 6\end{vmatrix}-(y+1)\begin{vmatrix}1 & -3\\ 3 & 6\end{vmatrix}+(z-5)\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}=0,$$

т. е. $3x-3y-z-4=0$.

4.1. Каковы особенности расположения плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ относительно прямоугольной декартовой системы координат в следующих случаях: 1) $D=0$; 2) $A=0$; 3) $B=0$; 4) $C=0$; 5) $A=0$, $D=0$; 6) $B=0$, $D=0$; 7) $C=0$, $D=0$; 8) $B=0$, $C=0$; 9) $A=0$, $C=0$; 10) $A=0$, $B=0$; 11) $B=0$, $C=0$, $D=0$; 12) $A=0$, $C=0$, $D=0$; 13) $A=0$, $B=0$, $D=0$?

4.2. Составить уравнения плоскостей, параллельных координатным плоскостям и проходящих через точку $M_0(2, -3, 1)$.

4.3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 и имеющей нормальный вектор **n**, в каждом из следующих случаев:

1) $M_0(4, 3, -2)$, $\mathbf{n}=(1, -7, 5)$;

2) $M_0(1, -6, 8)$, $\mathbf{n}=(2, 1, -2)$.

4.4. Записать уравнение плоскости в каждом из следующих случаев:

1) плоскость перпендикулярна оси Ox и проходит через точку $P(7, -4, 3)$;

2) плоскость перпендикулярна оси Oy и проходит через точку $Q(1, 2, -6)$;

3) плоскость перпендикулярна оси Oz и проходит через точку $R(-5, 8, 9)$.

4.5. Записать уравнение плоскости в каждом из следующих случаев:

1) плоскость параллельна оси Ox и проходит через точки $P(3, -5, 6)$, $Q(2, 1, 1)$;

2) плоскость параллельна оси Oy и проходит через точки $R(1, -2, 1)$, $S(2, 3, -1)$;

3) плоскость параллельна оси Oz и проходит через точки $K(3, 1, -1)$, $N(1, -1, 2)$.

4.6. Записать уравнение плоскости в каждом из следующих случаев:

1) плоскость проходит через точку $P(5, -8, 1)$ и ось Ox;

2) плоскость проходит через точку $Q(-2, 4, 6)$ и ось Oy;

3) плоскость проходит через точку $S(3, 7, -9)$ и ось Oz.

4.7. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, не лежащие на одной прямой.

4.8. Составить уравнение плоскости, проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и параллельной вектору $\mathbf{a}=(a_1, a_2, a_3)$. Векторы **a** и $\overline{M_1M_2}$ неколлинеарны.

4.9. Записать уравнение плоскости, проходящей через три указанные точки:

1) $M_1(9, -11, 5)$, $M_2(7, 4, -2)$, $M_3(-7, 13, -3)$;

2) $M_1(-1, 2, 1)$, $M_2(-3, 1, 2)$, $M_3(3, -2, 2)$.

4.10. Записать уравнение плоскости, проходящей через две точки M_1, M_2 и параллельной данному вектору **a**:

1) $M_1(1, -2, -1)$, $M_2(4, 1, 1)$, $\mathbf{a}=(5, 3, 4)$;

2) $M_1(3, 2, 1)$, $M_2(1, -4, 3)$, $\mathbf{a}=(2, -1, -2)$.

4.11. Найти отрезки, отсекаемые на осях координат плоскостями:

1) $3x-4y+2z-12=0$; 2) $x+5y-4z+20=0$;

3) $6x-y-7z-42=0$; 4) $2x-3y+5z+15=0$.

4.12. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2, 5, -4)$ и отсекающей на осях координат равные отрезки.

4.13. Вычислить объем пирамиды, ограниченной координатными плоскостями и плоскостью $3x-6y+4z-24=0$.

4.14. Записать уравнение плоскости, проходящей через точки $M(8, 3, 6)$, $N(4, 2, 7)$ и отсекающей на оси Oz отрезок длиной $c=6$.

4.15. Пересекает ли плоскость $3x+4y-6z+5=0$ отрезок, соединяющий начало координат с точкой $M(2, -3, 1)$?

4.16. Пересекает ли плоскость $2x-5y+3z-7=0$ отрезок M_1M_2 в случае, когда:

1) $M_1(1, 2, 3)$, $M_2(4, 6, 5)$; 2) $M_1(4, -1, 1)$, $M_2(2, 1, 2)$?

4.2. Угол между двумя плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей

Косинус угла между двумя плоскостями:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \tag{4.4}$$

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \tag{4.5}$$

определяется формулой

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Необходимое и достаточное условие перпендикулярности плоскостей (4.4) и (4.5):

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$$

Необходимое и достаточное условие параллельности плоскостей (4.4) и (4.5):

$$A_2=\lambda A_1,\ B_2=\lambda B_1,\ C_2=\lambda C_1,\ D_2\neq\lambda D_1 \tag{4.6}$$

или

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}.$$

Необходимое и достаточное условие совпадения плоскостей (4.4) и (4.5):

$$A_2=\lambda A_1,\ B_2=\lambda B_1,\ C_2=\lambda C_1,\ D_2=\lambda D_1$$

или

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}.$$

Примеры. 1. Даны вершина параллелепипеда $M(1, 2, 3)$ и уравнения плоскостей, в которых лежат три его непараллельные грани: $2x - y + 2z - 3 = 0$, $x + 2y - 2z - 1 = 0$, $3x - y - z - 1 = 0$. Составить уравнения плоскостей, в которых лежат три другие грани.

В соответствии с условием (4.6) уравнение плоскости, параллельной плоскости $2x - y + 2z - 3 = 0$, можно искать в виде

$$2x - y + 2z + D = 0.$$

Поскольку искомой плоскости принадлежит точка $M(1, 2, 3)$, то $2 \cdot 1 - 2 + 2 \cdot 3 + D = 0$, откуда $D = -6$. Следовательно, уравнение имеет вид

$$2x - y + 2z - 6 = 0.$$

Аналогично составляются уравнения плоскостей, в которых лежат две остальные грани:

$$x + 2y - 2z + 1 = 0, \quad 3x - y - z + 2 = 0.$$

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через две точки $M(2, 1, -1)$, $N(1, -3, 4)$ перпендикулярно плоскости

$$5x - 6y + 7z - 4 = 0.$$

Так как искомая плоскость проходит через точку M, то ее уравнение можно представить в виде

$$A(x - 2) + B(y - 1) + C(z + 1) = 0. \qquad (1)$$

Координаты A, B, C нормального вектора $\mathbf{n}$ этой плоскости определим из следующих условий: 1) искомая плоскость перпендикулярна плоскости $5x - 6y + 7z - 4 = 0$; 2) искомая плоскость проходит через точку $N(1, -3, 4)$. Эти два условия приводят к уравнениям:

$$5 \cdot A - 6 \cdot B + 7 \cdot C = 0;$$

$$A(1 - 2) + B(-3 - 1) + C(4 + 1) = 0, \quad -A - 4B + 5C = 0.$$

Выражая из этих уравнений A и B через C, находим: $A = \frac{1}{13}C$, $B = \frac{16}{13}C$. Подставляя значения A и B в уравнение (1), получаем

$$\frac{1}{13}C(x - 2) + \frac{16}{13}C(y - 1) + C(z + 1) = 0$$

или

$$(x - 2) + 16(y - 1) + 13(z + 1) = 0.$$

Следовательно, уравнение плоскости имеет вид

$$x + 16y + 13z - 5 = 0.$$

4.17. Среди данных плоскостей указать параллельные, совпадающие, перпендикулярные:

1) $2x - 3y + 4z - 5 = 0$; 2) $4x - 6y + 8z + 3 = 0$;
3) $6x - 9y + 12z - 15 = 0$; 4) $x + 2y + z + 6 = 0$.

4.18. Найти углы между двумя плоскостями:

1) $5x + 4y - 2z - 3 = 0$, $20x + 16y - 8z + 5 = 0$;
2) $3x - 2y + 5z + 2 = 0$, $x + 4y + z - 4 = 0$;
3) $11x - 8y - 7z + 6 = 0$, $4x - 10y + z - 5 = 0$;
4) $5x - y + 3z - 2 = 0$, $-x + 2y + 10z - 7 = 0$;
5) $3x - 5y - 4z + 9 = 0$, $x + 2y - z + 4 = 0$;
6) $x - 2z + 8 = 0$, $y - 5z + 7 = 0$.

4.19. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1, -3, 2)$ и параллельной плоскости $7x + 3y - 8z - 5 = 0$.

4.20. Записать уравнение плоскости, проведенной через точку $M(4, -6, 5)$ и параллельной плоскости, проходящей через три точки $P(3, -2, 2)$, $Q(-3, 1, 2)$, $R(-1, 2, 1)$.

4.21. Доказать, что параллелепипед, три непараллельные грани которого лежат в плоскостях $95x + 29y - 43z - 37 = 0$, $x + 16y + 13z - 11 = 0$, $5x - 6y + 7z - 3 = 0$, является прямоугольным.

4.22. Даны вершина параллелепипеда $M(2, 1, 3)$ и уравнения плоскостей, в которых лежат три его непараллельные грани: $x + y + z - 1 = 0$, $2x - 2y + 3z - 7 = 0$, $3x + 4y - 5z + 6 = 0$. Записать уравнения плоскостей, в которых лежат три другие грани; найти длину диагонали MN этого параллелепипеда.

4.23. Составить уравнение плоскости, проведенной через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ перпендикулярно плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$. Рассмотреть случай, когда вектор $\overline{M_1M_2}$ перпендикулярен данной плоскости.

4.24. Составить уравнение плоскости, проведенной через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно вектору $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и перпендикулярно плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.

4.25. Составить уравнение плоскости, проведенной через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и перпендикулярной двум пересекающимся плоскостям $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

4.26. Записать уравнение плоскости, проходящей через начало координат, перпендикулярной плоскости $5x - 2y + 5z + 3 = 0$ и образующей с плоскостью $x - 4y - 8z + 7 = 0$ угол $\varphi = 45°$.

4.3. Расстояние от точки до плоскости

Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$$

вычисляется по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (4.7)$$

Примеры. 1. Две грани куба лежат соответственно на плоскостях $x + 2y - 2z - 1 = 0$, $x + 2y - 2z + 5 = 0$. Вычислить объем данного куба.

Чтобы решить задачу, достаточно найти длину ребра куба, равную расстоянию между данными параллельными плоскостями. Это расстояние равно расстоянию от любой точки одной плоскости до другой плоскости. Выберем на первой плоскости произвольную точку. Приняв, например, что $y_0 = 1$, $z_0 = 1$, из уравнения $x + 2y - 2z - 1 = 0$ найдем $x_0 = 1$.

По формуле (4.7) находим расстояние от точки $M_0(1, 1, 1)$ до плоскости $x + 2y - 2z + 5 = 0$:

$$d = \frac{|1 + 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + 5|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{6}{3} = 2.$$

Поскольку $V = a^3$ и $a = d = 2$, то $V = 8$ куб. ед.

2. На оси Oy найти точку, отстоящую от плоскости $2x + 3y - 6z + 7 = 0$ на расстоянии $d = 5$.

Пусть $M(0, y, 0)$ — искомая точка ($x = 0$, $z = 0$, так как она принадлежит оси Oy). Исходя из условия, получаем:

$$\frac{|2\cdot 0+3y-6\cdot 0+7|}{\sqrt{2^2+3^2+(-6)^2}}=5, \quad \frac{|3y+7|}{7}=5,$$

откуда $3y+7=\pm 35$. Решая полученные уравнения, находим: $y_1 = 28/3$, $y_2 = -14$. Следовательно, условию задачи удовлетворяют две точки: $M_1(0, 28/3, 0)$, $M_2(0, -14, 0)$.

4.27. Вычислить расстояния от данных точек M_1, M_2 до указанных плоскостей:

1) $x-2y+2z-3=0$, $M_1(4, 2, -1)$, $M_2(-3, 5, -7)$;
2) $2x+3y-6z-7=0$, $M_1(-2, 5, 1)$, $M_2(9, 1, 2)$;
3) $10x-11y+2z-45=0$, $M_1(0, 1, -2)$, $M_2(6, -1, 2)$.

4.28. Найти направляющие косинусы и длину перпендикуляра, проведенного из начала координат к плоскости $2x+10y-11z-60=0$.

4.29. Дана треугольная пирамида с вершинами $A(1, 1, 1)$, $B(-11, 3, -3)$, $C(5, 2, 4)$, $D(2, 2, -5)$. Вычислить длину высоты, проведенной из вершины D к грани ABC.

4.30. Вычислить расстояние между параллельными плоскостями:

1) $2x+y-2z-6=0$, $2x+y-2z-15=0$;
2) $3x-2y+6z-7=0$, $3x-2y+6z-35=0$;
3) $x+2y+2z-9=0$, $2x+4y+4z+15=0$;
4) $2x-10y+11z+30=0$, $2x-10y+11z-45=0$.

4.31. На оси Ox найти точку, отстоящую от плоскости $6x+2y+3z-12=0$ на расстоянии $d=6$.

4.32. На оси Oy найти точку, равноудаленную от двух плоскостей: $3x+2y-6z-1=0$, $16x+12y-15z-7=0$.

4.33. На оси Oz найти точку, равноудаленную от точки $M(2, -2, 6)$ и плоскости $x+y+z-2=0$.

4.34. Записать уравнения плоскостей, параллельных плоскости $2x-2y-z-6=0$ и отстоящих от нее на расстоянии $d=7$.

4.35. Записать уравнение плоскости, параллельной плоскости $x+2y-2z+7=0$ и удаленной от точки $M(4, 3, -2)$ на расстояние $d=7$.

4.36. Составить уравнения плоскостей, которые делят пополам двугранные углы, образованные двумя пересекающимися плоскостями:

1) $2x+3y-z+1=0$, $x-2y+3z-4=0$;
2) $x-y+z-2=0$, $2x+2y-2z+3=0$;
3) $3x-2y+6z-7=0$, $x+2y-2z-5=0$.

4.37. Составить уравнение плоскости, делящей пополам тот двугранный угол между двумя плоскостями $4x-3y-2z+5=0$, $2x+4y-3z-7=0$, в котором лежит начало координат.

4.38. Составить уравнение плоскости, делящей пополам тот двугранный угол между двумя плоскостями $5x-10y-10z+9=0$, $2x+11y+10z-8=0$, в котором лежит точка $M(1, 2, 3)$.

4.4. Параметрические уравнения прямой. Канонические уравнения прямой. Уравнения прямой, проходящей через две точки

Направляющим вектором прямой называется любой вектор, лежащий на данной прямой или параллельный ей.

Параметрическими уравнениями прямой называются уравнения вида:

$$x = x_0 + a_1t, \quad y = y_0 + a_2t, \quad z = z_0 + a_3t, \tag{4.8}$$

где x_0, y_0, z_0 — координаты точки M_0, через которую проходит прямая; a_1, a_2, a_3 — координаты ее направляющего вектора $\mathbf{a}$ (рис. 4.3). Исключая из этих уравнений параметр t, получаем *канонические уравнения прямой*:

$$\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}.$$

Уравнения прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, имеют вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

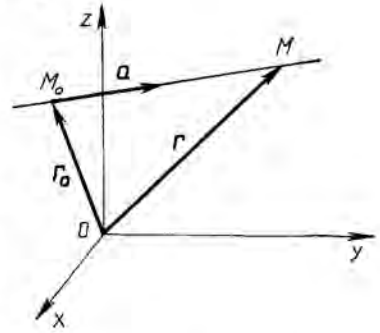


Рис. 4.3

Примеры. 1. Составить параметрические и канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(2, -5, 8)$ перпендикулярно плоскости $3x+4y-7z-6=0$.

В качестве направляющего вектора прямой можно взять нормальный вектор $\mathbf{n}=(3, 4, -7)$ данной плоскости.

В соответствии с уравнениями (4.8) получаем:

$$x = 2+3t, \quad y = -5+4t, \quad z = 8-7t.$$

Исключая из этих уравнений параметр t, находим канонические уравнения данной прямой:

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+5}{4}=\frac{z-8}{-7}.$$

2. Дан треугольник с вершинами $A(1, 4, -5)$, $B(-3, 6, 9)$, $C(5, 6, 7)$. Составить уравнения прямой, на которой лежит медиана, проведенная из вершины B.

Используя формулы (3.3), находим середину отрезка AC — точку $D(3, 5, 1)$. Задача сводится к составлению уравнения прямой, проходящей через две точки B и D. Считая точку B первой, а точку D второй, получаем уравнения:

$$\frac{x+3}{3+3}=\frac{y-6}{5-6}=\frac{z-9}{1-9} \quad \text{или} \quad \frac{x+3}{6}=\frac{y-6}{-1}=\frac{z-9}{-8}.$$

Замечание 1. Обозначая равные отношения через t, получаем параметрические уравнения данной прямой:

$$x = -3+6t, \quad y = 6-t, \quad z = 9-8t.$$

Замечание 2. Если в этих уравнениях $0 \leqslant t \leqslant 1$, то точка описывает медиану BD. При $t=0$ получаем $x=-3$ $y=6$, $z=9$, т. е. координаты точки B, при $t=1$ — координаты точки D.

4.39. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(1, -2, 3)$ параллельно: 1) вектору $\mathbf{a}=(4, 5, -7)$; 2) оси Ox; 3) оси Oy; 4) оси Oz.

4.40. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(9, -8, -5)$ перпендикулярно: 1) плоскости

$2x+3y+4z-11=0$; 2) плоскости Oyz; 3) плоскости Oxz; 4) плоскости Oxy.

4.41. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(4, 6, -7)$ параллельно: 1) вектору $\mathbf{a}=(3, -1, 5)$; 2) оси Ox; 3) оси Oy; 4) оси Oz.

4.42. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(-1, 3, -9)$ перпендикулярно: 1) плоскости $3x-4y+5z-1=0$; 2) плоскости Oyz; 3) плоскости Oxz; 4) плоскости Oxy.

4.43. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(2, 5, -8)$ параллельно: 1) прямой $x=3-4t$, $y=7+9t$, $z=-2-6t$; 2) прямой $\frac{x-1}{3}=\frac{y+6}{5}=\frac{z-4}{-7}$.

4.44. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(10, -12, 15)$ параллельно: 1) прямой $x=-2+t$, $y=5-3t$, $z=4+8t$; 2) прямой $\frac{x+3}{4}=\frac{y-9}{-2}=\frac{z+5}{7}$.

4.45. Записать параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(2, -3, 4)$ и параллельной вектору, образующему с координатными осями углы $\alpha=\pi/4$, $\beta=\pi/3$, $\gamma=\pi/3$.

4.46. Дан треугольник с вершинами $A(4, -5, 7)$, $B(3, 2, -1)$, $C(-6, 8, 10)$. Записать уравнения прямых, на которых лежат его стороны.

4.47. Дан треугольник с вершинами $A(1, 2, -4)$, $B(5, -6, 2)$, $C(3, 8, -10)$. Записать уравнения его медиан.

4.48. Три последовательные вершины параллелограмма находятся в точках $A(9, -3, 2)$, $B(4, -2, 8)$, $C(-7, -5, 6)$. Записать уравнения его диагоналей.

4.49. Дан треугольник с вершинами $A(5, -1, 3)$, $B(3, -4, -3)$, $C(-3, -16, 1)$. Составить параметрические уравнения прямой, на которой лежит биссектриса его внутреннего угла B.

4.50. Дан треугольник с вершинами $A(3, 2, 0)$, $B(6, 5, -4)$, $C(-6, 14, 9)$. Записать канонические уравнения прямой, на которой лежит биссектриса внешнего угла при вершине A.

4.5. Угол между двумя прямыми. Расстояние от точки до прямой. Кратчайшее расстояние между двумя прямыми

Косинус угла между двумя прямыми:

$$x=x_1+a_1t,\quad y=y_1+a_2t,\quad z=z_1+a_3t, \tag{4.9}$$

$$x=x_2+b_1t,\quad y=y_2+b_2t,\quad z=z_2+b_3t \tag{4.10}$$

определяется формулой

$$\cos\varphi=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}. \tag{4.11}$$

Необходимое и достаточное условие перпендикулярности прямых (4.9) и (4.10) выражается равенством

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0.$$

Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до прямой (4.9) вычисляется по формуле

$$d=\frac{|[(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0),\ \mathbf{a}]|}{|\mathbf{a}|},$$

где $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{r}_1$ — радиусы-векторы точек M_0 и M_1; $\mathbf{a}$ — направляющий вектор прямой (рис. 4.4).

Расстояние между прямыми (4.9) и (4.10) определяется формулой

$$d=\frac{|(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)\,\mathbf{ab}|}{|[\mathbf{a},\ \mathbf{b}]|}, \tag{4.12}$$

где $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ — радиусы-векторы точек M_1 и M_2; $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ — направляющие векторы данных прямых (рис. 4.5).

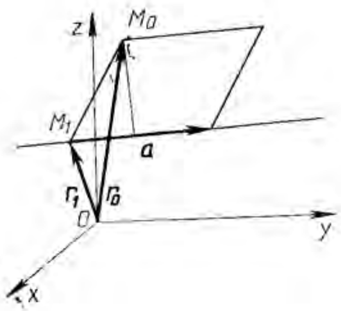


Рис. 4.4

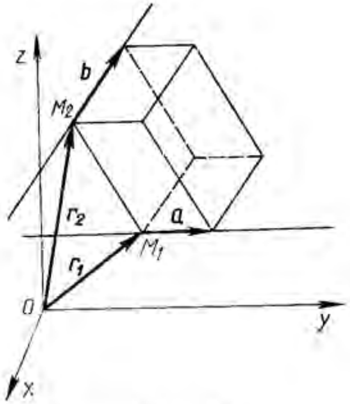


Рис. 4.5

Примеры. 1. Найти угол между двумя прямыми:

$$\frac{x-4}{2}=\frac{y-5}{7}=\frac{z+6}{8},\quad \frac{x+1}{8}=\frac{y-5}{-11}=\frac{z+9}{-7}.$$

Первая прямая имеет направляющий вектор $\mathbf{a}=(2, 7, 8)$, вторая — направляющий вектор $\mathbf{b}=(8, -11, -7)$. Угол между двумя прямыми по определению равен углу между их направляющими векторами.

По формуле (4.11) находим

$$\cos\varphi=\frac{2\cdot 8+7(-11)+8(-7)}{\sqrt{2^2+7^2+8^2}\sqrt{8^2+(-11)^2+(-7)^2}}=\frac{-117}{\sqrt{117}\sqrt{234}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно, $\varphi=135°$.

2. Найти расстояние между двумя прямыми: $x=3+t$, $y=-4+2t$, $z=5-2t$ и $x=4+8t$, $y=-2+6t$, $z=6+4t$.

Первая прямая проходит через точку $M_1(3, -4, 5)$ и имеет направляющий вектор $\mathbf{a}=(1, 2, -2)$, вторая проходит через точку $M_2(4, -2, 6)$ и имеет направляющий вектор $\mathbf{b}=(8, 6, 4)$.

Воспользуемся формулой (4.12), предварительно заметив, что $\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1=\overline{M_1M_2}=(1, 2, 1)$. Поскольку

$$(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)\,\mathbf{ab}=\begin{vmatrix}1&2&1\\1&2&-2\\8&6&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&1\\0&0&-3\\8&6&4\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}1&2\\8&6\end{vmatrix}=-30,$$

$$|(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)\mathbf{ab}|=30,\quad [\mathbf{a}, \mathbf{b}]=(20, -20, -10),\quad |[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|=30,$$

то

$$d=\frac{|(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)\,\mathbf{ab}|}{|[\mathbf{a},\mathbf{b}]|}=\frac{30}{30}=1.$$

4.51. Найти направляющие косинусы прямых:

1) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-5}{1}$; 2) $\frac{x+8}{6}=\frac{y-7}{2}=\frac{z+4}{-3}$;

3) $x=4-10t,\ y=9+2t,\ z=3-11t$;

4) $x=7-12t,\ y=9+5t,\ z=4$.

4.52. Найти косинус угла между двумя прямыми:

1) $\frac{x+4}{2}=\frac{y-5}{1}=\frac{z-7}{-2}$ и $\frac{x-8}{1}=\frac{y+6}{2}=\frac{z-1}{2}$;

2) $\frac{x-3}{2}=\frac{y+6}{7}=\frac{z+2}{8}$ и $\frac{x+5}{-8}=\frac{y-2}{11}=\frac{z+4}{7}$;

3) $x=1+3t,\ y=9-2t,\ z=8+4t$ и $x=-7+6t,\ y=2-4t,\ z=1+8t$;

4) $x=3-2t,\ y=7+10t,\ z=-5+11t$ и $x=8+t,\ y=9+2t,\ z=6+2t$.

4.53. Составить уравнения прямой, проведенной через точку $M(1, 3, -4)$ перпендикулярно к двум прямым:

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+4}{-5}=\frac{z-8}{-4},\quad \frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{5}=\frac{z-3}{2}.$$

4.54. Вычислить расстояние от точки $M(2, -3, 5)$ до каждой из следующих прямых:

1) $x=5+2t,\ y=-4-t,\ z=6-2t$;

2) $x=1-6t,\ y=-2-3t,\ z=8+2t$.

4.55. Найти расстояние между параллельными прямыми:

1) $x=1+3t,\ y=2-t,\ z=5+2t$ и $x=4-6t,\ y=-1+2t,\ z=7-4t$;

2) $x=9-t,\ y=8+2t,\ z=-5-3t$ и $x=2-3t,\ y=5+6t,\ z=4-9t$.

4.56. Найти расстояние между двумя прямыми:

1) $x=3-6t,\ y=-1+4t,\ z=t$ и $x=-2+3t,\ y=4,\ z=3-t$;

2) $\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{2}$ и $\frac{x}{-1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z}{3}$.

4.57. Составить уравнения прямой, проведенной через точку $M(4, 7, -5)$ перпендикулярно к двум данным прямым: $x=3+2t$, $y=8-t$, $z=-1+4t$ и $x=1+3t$, $y=-5+t$, $z=6+t$.

4.58. Найти кратчайшее расстояние между диагональю куба и непересекающей ее диагональю грани, если ребро куба равно a.

4.59. Составить параметрические уравнения общего перпендикуляра к двум прямым, заданным уравнениями: $x=3t-7$, $y=-2t+4$, $z=3t+4$ и $x=t+1$, $y=2t-8$, $z=-t-12$.

4.60. Составить уравнения общего перпендикуляра к двум непараллельным прямым: $\mathbf{r}=\mathbf{r}_1+\mathbf{a}_1t$, $\mathbf{r}=\mathbf{r}_2+\mathbf{a}_2t$.

4.6. Прямая как линия пересечения двух плоскостей. Пучок плоскостей. Взаимное расположение двух прямых в пространстве

Прямая как линия пересечения двух плоскостей определяется заданием двух уравнений первой степени:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\qquad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \tag{4.13}$$

при условии, что коэффициенты A_1, B_1, C_1 не пропорциональны коэффициентам A_2, B_2, C_2.

Уравнения (4.13) можно привести к параметрическому виду, для чего достаточно выбрать произвольную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ этой прямой и взять в качестве направляющего вектора вектор $\mathbf{a}=[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]$, где $\mathbf{n}_1=(A_1, B_1, C_1)$, $\mathbf{n}_2=(A_2, B_2, C_2)$ — векторы нормалей к соответствующим плоскостям (рис. 4.6):

$$\mathbf{a}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\end{vmatrix},$$

$$\mathbf{a}=\left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix} A_1 & C_1\\ A_2 & C_2\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}\right).$$

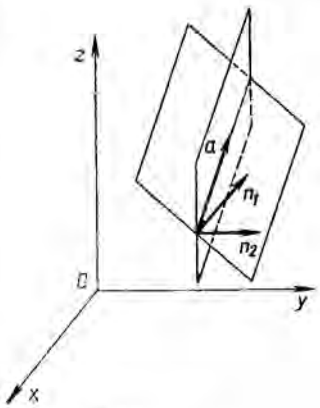


Рис. 4.6

Пучком плоскостей называется совокупность плоскостей, проходящих через одну и ту же прямую. Уравнение пучка плоскостей, проходящих через прямую (4.13), имеет вид

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0,$$

где α и β — действительные числа, причем хотя бы одно из них отлично от нуля. Это уравнение можно привести к виду

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0, \tag{4.14}$$

где $\lambda=\beta/\alpha$, $\alpha\neq 0$. Уравнение (4.14) определяет все плоскости пучка, за исключением той, которой соответствует $\alpha=0$, т. е. за исключением плоскости $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.

Примеры. 1. Дан треугольник с вершинами $A(1, 1, 1)$, $B(5, -3, 2)$, $C(3, 2, 0)$. Составить параметрические уравнения прямой, на которой лежит его высота, проведенная из точки B.

Эту прямую можно рассматривать как линию пересечения двух плоскостей: плоскости, проходящей через три точки A, B, C, и плоскости, проходящей через точку B перпендикулярно к вектору $\overline{AC}=(2, 1, -1)$. Составим их уравнения:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1\\ 5-1 & -3-1 & 2-1\\ 3-1 & 2-1 & 0-1\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1\\ 4 & -4 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}=0,$$

$$x+2y+4z-7=0,$$

$$2(x-5)+1(y+3)-1(z-2)=0,\ 2x+y-z-5=0.$$

Следовательно, данная прямая определяется уравнениями:

$$x+2y+4z-7=0,\ 2x+y-z-5=0.$$

Приведем эти уравнения к параметрическому виду. Нам известна точка B, через которую проходит данная прямая. Найдем координаты направляющего вектора $\mathbf{a}=[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]$. Так как $\mathbf{n}_1=(1, 2, 4)$, $\mathbf{n}_2=(2, 1, -1)$, то

$$\mathbf{a} = \left(\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right),$$

$$\mathbf{a} = (-6,\ 9,\ -3) \text{ или } \frac{1}{3}\mathbf{a} = (-2,\ 3,\ -1).$$

Следовательно, параметрические уравнения прямой имеют вид:

$$x = 5 - 2t,\ \ y = -3 + 3t,\ \ z = 2 - t.$$

2. Записать уравнение плоскости, проходящей через прямую пересечения плоскостей $x + 2y + 3z - 7 = 0$, $2x - y - z + 5 = 0$ и перпендикулярной к плоскости $4x - 3y + 2z - 1 = 0$.

Уравнение

$$\alpha(x + 2y + 3z - 7) + \beta(2x - y - z + 5) = 0 \qquad (1)$$

или

$$(\alpha + 2\beta)x + (2\alpha - \beta)y + (3\alpha - \beta)z - 7\alpha + 5\beta = 0$$

определяет пучок плоскостей, проходящих через данную прямую. Среди этих плоскостей выберем ту, которая перпендикулярна плоскости $4x - 3y + 2z - 1 = 0$. Для нее должно выполняться условие

$$4(\alpha + 2\beta) - 3(2\alpha - \beta) + 2(3\alpha - \beta) = 0,\ \ 4\alpha + 9\beta = 0,$$

откуда $\beta = -\frac{4}{9}\alpha$. Подставляя это выражение для β в уравнение (1), получаем

$$9\alpha(x + 2y + 3z - 7) - 4\alpha(2x - y - z + 5) = 0.$$

Считая $\alpha \neq 0$ и сокращая на α, находим искомое уравнение:

$$x + 22y + 31z - 83 = 0.$$

Замечание. При $\alpha = 0$ получаем $2x - y + z + 5 = 0$. Эта плоскость условию задачи не удовлетворяет.

3. Найти необходимые и достаточные условия, при которых прямые:

$$x = x_1 + a_1t,\ \ y = y_1 + a_2t,\ \ z = z_1 + a_3t,$$
$$x = x_2 + b_1t,\ \ y = y_2 + b_2t,\ \ z = z_2 + b_3t$$

скрещиваются; пересекаются; параллельны; совпадают.

Введем в рассмотрение три вектора: $\overline{M_1M_2} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ (см. рис. 4.5).

Данные прямые скрещиваются тогда и только тогда, когда эти векторы некомпланарны, т. е. когда их смешанное произведение отлично от нуля: $(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)\mathbf{ab} \neq 0$.

Данные прямые лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда указанные векторы компланарны, т. е. когда их смешанное произведение равно нулю: $(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)\mathbf{ab} = 0$.

Данные прямые пересекаются, когда векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ неколлинеарны; параллельны, когда векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны; совпадают, когда все векторы $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ коллинеарны.

4. Доказать, что прямые $x = 8 + 3t$, $y = -7 - 5t$, $z = 11 + 6t$ и $x = 9 + 7t$, $y = 1 - 2t$, $z = 3 + 4t$ пересекаются, и найти точку их пересечения.

Рассмотрим векторы $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (9 - 8,\ 1 - (-7),\ 3 - 11) = (1,\ 8,\ -8)$, $\mathbf{a} = (3,\ -5,\ 6)$, $\mathbf{b} = (7,\ -2,\ 4)$ и их смешанное произведение

$$(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)\,\mathbf{ab} = \begin{vmatrix} 1 & 8 & -8 \\ 3 & -5 & 6 \\ 7 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 30 \\ 2 & 2 & 60 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 30 \\ 2 & 60 \end{vmatrix} = 0.$$

Поскольку смешанное произведение трех векторов равно нулю, то прямые лежат в одной плоскости. Так как направляющие векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ данных прямых неколлинеарны, то прямые пересекаются.

Чтобы найти точку пересечения прямых, приравняем выражения для координат, предварительно обозначив параметры разными буквами:

$$8 + 3t = 9 + 7s,\ \ -7 - 5t = 1 - 2s,\ \ 11 + 6t = 3 + 4s.$$

Умножая первое уравнение на 2 и вычитая из него почленно третье, имеем: $5 = 15 + 10s$, $10s = -10$, $s = -1$.

При $s = -1$ получаем $t = -2$. Подставляя значение $t = -2$ в уравнения первой прямой (или $s = -1$ в уравнения второй прямой), находим $x = 2$, $y = 3$, $z = -1$. Следовательно, $M_0(2,\ 3,\ -1)$ — точка пересечения данных прямых.

4.61. Составить параметрические уравнения следующих прямых:
1) $4x - 3y + 2z - 1 = 0$, $5x - 2y + 3z - 3 = 0$;
2) $x - 3y + z + 3 = 0$, $3x + y - 2z - 6 = 0$;
3) $x + 2y + z - 1 = 0$, $2x + 2y - 3z + 6 = 0$;
4) $x + y + z - 3 = 0$, $x - y + z - 1 = 0$.

4.62. Составить канонические уравнения следующих прямых:
1) $3x - 2y + z - 2 = 0$, $4x + y - 3z - 2 = 0$;
2) $2x + 3y + 2z - 4 = 0$, $x + 4y + 5z - 6 = 0$.

4.63. Записать канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(4,\ 3,\ -6)$ параллельно прямой $7x + y + z - 8 = 0$, $6x + y - 2z - 7 = 0$.

4.64. Записать параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(5,\ -2,\ 7)$ параллельно прямой $x + 2y + 3z - 5 = 0$, $2x + y + 2z - 3 = 0$.

4.65. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2,\ -1,\ -3)$ и прямую $x + 2y - 3z - 3 = 0$, $2x + y + z - 7 = 0$.

4.66. Записать уравнение плоскости, проектирующей прямую $3x - 3y - 4z = 0$, $4x + y + 3z - 5 = 0$ на плоскость $2x - 6y + 7z - 9 = 0$.

4.67. Записать параметрические уравнения проекции прямой $2x - y - z - 1 = 0$, $x + y + 2z - 2 = 0$ на плоскость $9x + 4y - 5z - 13 = 0$.

4.68. Записать уравнение плоскости, проходящей через прямую пересечения плоскостей $3x - 2y + 4z - 1 = 0$, $5x + y - 2z - 6 = 0$ параллельно плоскости $x - y + 2z - 7 = 0$.

4.69. Записать уравнение плоскости, проходящей через прямую $x + 2y + 3z - 5 = 0$, $3x - 4y + 2z + 1 = 0$ и равноудаленной от точек $M(1,\ 2,\ -1)$ и $N(-2,\ 1,\ 2)$.

4.70. Записать уравнение плоскости, проходящей через прямую $x + y - z + 1 = 0$, $3x + 2y + z - 4 = 0$ и отстоящей от начала координат на расстоянии $\rho = 0{,}6$.

4.71. Доказать, что прямые

$$\frac{x + 7}{8} = \frac{y - 4}{5} = \frac{z}{2} \quad \text{и} \quad \frac{x - 1}{1} = \frac{y - 3}{7} = \frac{z - 2}{4}$$

являются скрещивающимися.

4.72. Доказать, что прямые $x = 7 + 5t$, $y = -5 - 7t$, $z = -2 - 3t$ и $x = t$, $y = t$, $z = -3 + 2t$ пересекаются. Найти точку пересечения. Записать уравнение плоскости, в которой лежат эти прямые.

4.73. Доказать, что прямые $2x - y - z - 1 = 0$, $x + y + 2z - 2 = 0$ и $3x - 3y - 4z = 0$, $4x + y + 3z - 5 = 0$ совпадают.

4.74. Доказать, что прямые $3x + 4y + 7z - 7 = 0$, $4x + 5y + 8z - 8 = 0$ и $3x + 5y + 11z = 0$, $2x + 3y + 6z = 0$ параллельны.

В задачах 4.75—4.82 исследовать взаимное расположение прямых.

4.75. $x = t, \quad y = 1 + 4t, \quad z = 1 - 3t$ и $x = 1 + 7t, \quad y = -8t, \quad z = 1 + 5t$.

4.76. $x = -3t, \quad y = 2 + 3t, \quad z = 1$ и $x = 1 + 5t, \quad y = 1 + 13t, \quad z = 1 + 11t$.

4.77. $x = 2 + 2t, \ y = 1, \ z = -2t$ и $x = 2t, \ y = 0, \ z = -2t$.

4.78. $x = 8 + 3t, \ y = 7 - 2t, \ z = 11 + t$ и $x=5 - 6t, \ y=9 + 4t, \ z = 10 - 2t$.

4.79. $x + y + 2z - 4 = 0, \ 2x + 2y + z - 5 = 0$ и $3x - 2y + z - 2 = 0, \ 4x + y - 3z - 2 = 0$.

4.80. $4x + y + 3z - 5 = 0, \ 7x - 2y - z - 5 = 0$ и $x + 4y + 7z - 5 = 0, \ 13x - 8y - 9z - 5 = 0$.

4.81. $5x + 7y + 13z - 13 = 0, \ 7x + 9y + 15z - 15 = 0$ и $3x + 5y + 11z = 0, \ 2x + 2y + 6z = 0$.

4.82. $x - 2y - 4z = 0, \ x + 2y + 2 = 0$ и $x - 2y - 6 = 0, \ 3x + 3y + 4z = 0$.

4.7. Угол между прямой и плоскостью. Взаимное расположение прямой и плоскости

Синус угла между прямой

$$x = x_0 + a_1t, \quad y = y_0 + a_2t, \quad z = z_0 + a_3t \tag{4.15}$$

и плоскостью

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{4.16}$$

определяется по формуле

$$\sin\varphi = \frac{|Aa_1 + Ba_2 + Ca_3|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}. \tag{4.17}$$

Прямая (4.15) и плоскость (4.16) параллельны, если

$$Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0; \tag{4.18}$$

перпендикулярны, если

$$\frac{A}{a_1} = \frac{B}{a_2} = \frac{C}{a_3}.$$

Прямая (4.15) лежит в плоскости (4.16), если

$$Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0, \ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0.$$

Координаты точки пересечения прямой (4.15) и плоскости (4.16) определяют из системы уравнений (4.15), (4.16).

Примеры. 1. Найти угол между прямой $x = 7 + 2t, \ y = -8 - t, \ z = 5 - t$ и плоскостью $2x + 2y - 4z - 3 = 0$.

Применяя формулу (4.17) для случая $a_1 = 2, \ a_2 = -1, \ a_3 = -1, \ A = 2, \ B = 2, \ C = -4$, получаем:

$$\sin\varphi = \frac{|2\cdot 2 + 2(-1) + (-4)(-1)|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-4)^2}\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{24}\sqrt{6}} = \frac{1}{2}, \ \varphi = 30^\circ.$$

2. Исследовать взаимное расположение прямой $x = 4 + 3t, \ y = 6 + 4t, \ z = 5 + 2t$ и плоскости $2x - 3y + 5z - 10 = 0$.

Поскольку

$$Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 2\cdot 3 + (-3)4 + 5\cdot 2 = 4 \neq 0,$$

т. е. условие (4.18) не выполняется, прямая и плоскость пересекаются. Найдем точку их пересечения, для чего подставим выражения для x, y и z в уравнение плоскости:

$$2(4 + 3t) - 3(6 + 4t) + 5(5 + 2t) - 10 = 0, \ 4t + 5 = 0, \ t = -\frac{5}{4}.$$

Подставив полученное значение параметра в уравнения прямой, найдем координаты точки пересечения:

$$x = 4 + 3\left(-\frac{5}{4}\right) = \frac{1}{4}, \quad y = 6 + 4\left(-\frac{5}{4}\right) = 1,$$

$$z = 5 + 2\left(-\frac{5}{4}\right) = \frac{5}{2}.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что точка $M(1/4, 1, 5/2)$ принадлежит данной плоскости.

4.83. Найти угол между прямой и плоскостью в каждом из следующих случаев:

1) $x = 5 + 11t, \ y = 4 - 8t, \ z = 3 - 7t; \ 7x + 2y - 8z - 10 = 0;$

2) $\dfrac{x + 3}{-1} = \dfrac{y - 5}{-1} = \dfrac{z + 4}{2}; \ 2x - 4y + 2z - 9 = 0;$

3) $x - 3y + z + 3 = 0, \quad 3x + y - 2z - 6 = 0; \quad x - 2y - z + 5 = 0;$

4) $x + y + z - 5 = 0, \ x + 2y + 3z - 6 = 0; \ 2x+2y-2z+7=0.$

4.84. Доказать, что прямая $x = 1 + 4t, \ y = -3 + 2t, \ z = 6 + 2t$ и плоскость $x + 3y - 5z - 2 = 0$ параллельны.

4.85. Доказать, что прямая $x = 3 + t, \ y = -2 + 4t, \ z = 5 + 4t$ лежит в плоскости $4x - 7y + 6z - 56 = 0$.

4.86. Доказать, что прямая $x = 6 - 2t, \ y = 3 + 5t, \ z = -1 - 4t$ перпендикулярна к плоскости $2x - 5y + 4z + 52 = 0$. Найти точку их пересечения.

4.87. Найти точку пересечения прямой $x = 1 + 3t, \ y = -2 + 4t, \ z = 5 - 2t$ с плоскостью $6x - 5y + 3z - 7 = 0$.

4.88. Исследовать взаимное расположение прямой и плоскости в каждом из следующих случаев:

1) $x = 2 - 3t, \ y = 7 - 2t, \ z = -1 + 4t; \ 6x - y + 4z - 5 = 0;$

2) $x = 1 + 10t, \ y = 3 - 2t, \ z = -2 + 3t; \ x + 2y - 2z - 11=0;$

3) $x - 2y + 3z - 2 = 0, \ 3x + y - 5z + 1 = 0; \ 4x - 5y + 2z - 1 = 0;$

4) $x + 3y - 2z - 4 = 0, \ 2x - y + 3z - 1 = 0; \ 3x + 2y + z - 5 = 0.$

4.89. Найти проекцию точки $M(2, 5, -3)$ на прямую $x = 2 - 5t, \ y = -3 + t, \ z = 4 + 2t$.

4.90. Найти проекцию точки $M(5, 1, 3)$ на прямую $x + y + z - 3 = 0, \ x + 2y + 3z - 6 = 0$.

4.91. Найти проекцию точки $M(1, -2, 4)$ на плоскость $5x - 3y + 6z + 35 = 0$.

4.92. Найти точку, симметричную точке $M(2, 2, 5)$ относительно прямой $x = 7 - 2t, \ y = 5 + 3t, \ z = -2 + 4t$.

4.93. Найти точку, симметричную точке $M(8, 9, -1)$ относительно плоскости $3x + 4y - 2z - 4 = 0$.

5. ПОВЕРХНОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

Уравнением поверхности называется уравнение

$$F(x, y, z) = 0,$$

которому удовлетворяют координаты любой точки поверхности, и только они.

Линия в пространстве как пересечение двух поверхностей определяется двумя уравнениями:

$$F(x, y, z) = 0, \ \Phi(x, y, z) = 0.$$

Поверхностью n-го порядка называется поверхность, определяемая уравнением n-й степени относительно декартовых координат. Поверхностью первого порядка является плоскость.

5.1. Поверхности вращения. Цилиндрические и конические поверхности

Поверхность, образованная вращением линии l, заданной уравнениями:

$$x = f(z), \quad y = \varphi(z), \tag{5.1}$$

вокруг оси Oz (рис. 5.1), определяется уравнением

$$x^2 + y^2 = f^2(z) + \varphi^2(z). \tag{5.2}$$

Уравнение цилиндрической поверхности, образующие которой параллельны оси Oz, имеет вид

$$F(x, y) = 0.$$

Примеры. 1. Составить уравнение поверхности, образованной вращением гиперболы $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $y = 0$ вокруг оси Oz.

Уравнения данной линии запишем в виде (5.1):

$$x = \pm \frac{a}{c}\sqrt{z^2 - c^2}, \ y = 0.$$

В соответствии с уравнением (5.2) получаем искомое уравнение поверхности вращения

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2}{c^2}(z^2 - c^2)$$

или

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

(Эта поверхность называется *двуполостным гиперболоидом вращения*.)

2. В сепарирующей центрифуге жидкость вращается вокруг оси цилиндра с постоянной угловой скоростью ω. По истечении некоторого времени после начала движения поверхность жидкости в сосуде принимает устойчивую форму (поверхность равновесия). Найти эту форму.

Примем ось цилиндра за ось Oz, направив ее вертикально вверх. За начало прямоугольной декартовой системы координат возьмем точку пересечения оси Oz с основанием цилиндра, в плоскости основания цилиндра выберем оси Ox и Oy. Очевидно, что поверхность жидкости будет поверхностью вращения, поэтому в каждом осевом сечении этой поверхности получится одна и та же линия. Для решения задачи достаточно исследовать одно из таких сечений.

На частицу Q, находящуюся в точке P этого сечения (рис. 5.2), действуют две силы: сила тяжести mg, направленная по вертикали вниз и изображенная

вектором $\overline{PL}$, и давление жидкости, действующее перпендикулярно к поверхности и изображенное вектором $\overline{PN}$. Вектор $\overline{PN}$ перпендикулярен к касательной к рассматриваемому сечению в точке P. Величину этой силы мы не знаем, но зато известна равнодействующая сил $\overline{PL}$ и $\overline{PN}$. Действительно, так как частица Q движется равномерно по окружности радиусом x, то ее ускорение $\overline{PM}$ направлено к центру и равно $m\omega^2 x$. Следовательно, зная величину и направление равнодействующей и одной из составляющих, можно найти величину и направление другой составляющей давления. Величина давления нас не интересует, направление давления $\overline{PN}$ позволяет определить направление касательной, т. е. найти угол α, образуемый касательной с осью Ox.

Из треугольника MPN, в котором $\angle PNM = \alpha$, находим:

$$\frac{dz}{dx} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{MP}{MN} = \frac{m\omega^2 x}{mg} = \frac{\omega^2 x}{g},$$

$$dz = \frac{\omega^2 x}{g}\,dx.$$

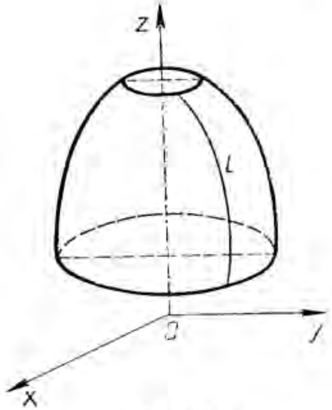


Рис. 5.1

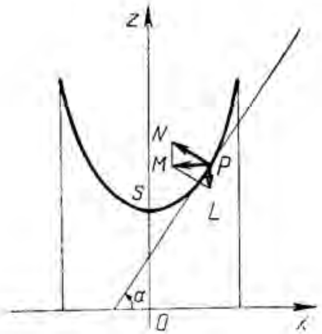


Рис. 5.2

Интегрируя последнее равенство, получаем

$$z = \frac{\omega^2 x^2}{2g} + C.$$

Если при $x = 0$ координата $z = z_0 = OS$, то $C = z_0$, поэтому

$$z - z_0 = \frac{\omega^2 x^2}{2g}.$$

Таким образом, рассматриваемое сечение определяется уравнениями:

$$x = \sqrt{\frac{2g}{\omega^2}(z - z_0)}, \quad y = 0. \tag{1}$$

Уравнение поверхности, полученной вращением линии (1) вокруг оси Oz, в соответствии с уравнением (5.2) принимает вид

$$x^2 + y^2 = \frac{2g}{\omega^2}(z - z_0) \ \text{ или } \ z - z_0 = \frac{\omega^2}{2g}(x^2 + y^2). \tag{2}$$

Уравнение (2) определяет параболоид вращения.

5.1. Составить уравнение поверхности, образованной вращением линии $x = f_1(y)$, $z = f_2(y)$ вокруг оси Oy.

5.2. Составить уравнение поверхности, образованной вращением линии $y = \varphi_1(x)$, $z = \varphi_2(x)$ вокруг оси Ox.

В задачах 5.3—5.6 составить уравнение поверхности, образованной вращением указанной линии вокруг оси Oz.

5.3. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $y = 0$. **5.4.** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, $y = 0$.

5.5. $x^2 = 2pz$, $y = 0$. **5.6.** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$, $y = 0$.

В задачах 5.7—5.12 составить уравнение поверхности, образованной вращением данной линии вокруг оси Oy.

5.7. $\frac{x}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$. **5.8.** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$.

5.9. $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$, $z = 0$. **5.10.** $x^2 = 2py$, $z = 0$.

5.11. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$, $z = 0$. **5.12.** $x^2 - a^2 = 0$, $z = 0$.

В задачах 5.13—5.20 составить уравнение поверхности, образованной вращением данной линии вокруг оси Ox.

5.13. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$. **5.14.** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$.

5.15. $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$, $z = 0$. **5.16.** $y^2 = 2qx$, $z = 0$.

5.17. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$, $z = 0$. **5.18.** $y^2 - b^2 = 0$, $z = 0$.

5.19. $y = \sin x$, $z = 0$. **5.20.** $y = \cos x$, $z = 0$.

5.21. Составить уравнение круглого цилиндра, проходящего через точку $P(1, -2, 1)$, осью которого является прямая $x = t$, $y = 1 + 2t$, $z = -3 - 2t$.

5.22. Записать уравнение конуса с вершиной в точке $P(1, 2, 4)$, образующие которого составляют с плоскостью $4x + 4y + 2z - 3 = 0$ углы $\varphi = 45°$.

5.23. Направляющая конуса задана уравнениями $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$, $z = 0$. Вершина конуса находится в точке $P(5, 0, 3)$. Составить уравнение конуса.

5.24. Записать уравнение круглого цилиндра, образующие которого касаются сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ и составляют равные углы с осями координат.

5.2. Поверхности второго порядка

Поверхностью второго порядка называется поверхность, определяемая алгебраическим уравнением второй степени относительно декартовых координат x, y, z.

Канонические уравнения поверхностей второго порядка:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{(эллипсоид, рис. 5.3);} \qquad (5.3)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{(однополостный гиперболоид, рис. 5.4);} \qquad (5.4)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad \text{(двуполостный гиперболоид, рис. 5.5);} \qquad (5.5)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad \text{(конус, рис. 5.6);} \qquad (5.6)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z \quad \text{(эллиптический параболоид, рис. 5.7);} \qquad (5.7)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z \quad \text{(гиперболический параболоид, рис. 5.8);} \qquad (5.8)$$

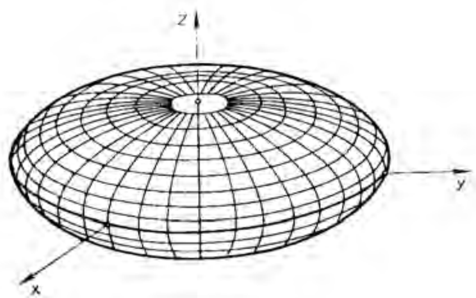


Рис. 5.3

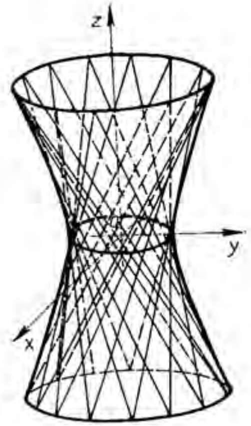


Рис. 5.4

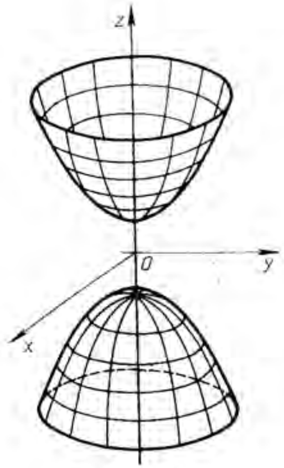


Рис. 5.5

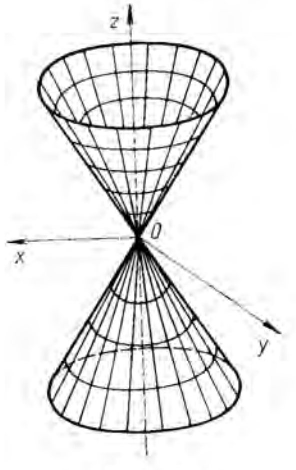


Рис. 5.6

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{(эллиптический цилиндр, рис. 5.9);} \qquad (5.9)$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{(гиперболический цилиндр, рис. 5.10);} \qquad (5.10)$$

$$x^2 = 2py \qquad \text{(параболический цилиндр, рис. 5.11);} \qquad (5.11)$$

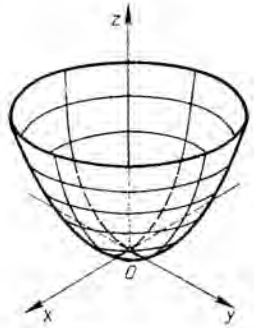


Рис. 5.7

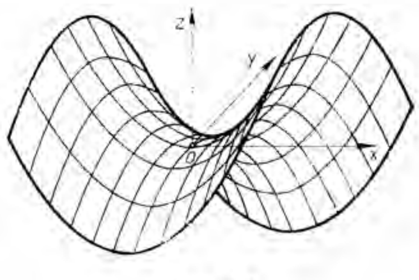


Рис. 5.8

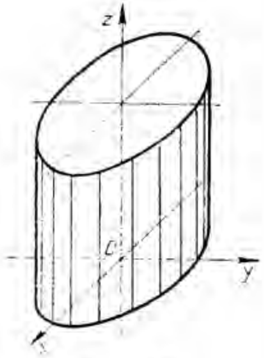


Рис. 5.9

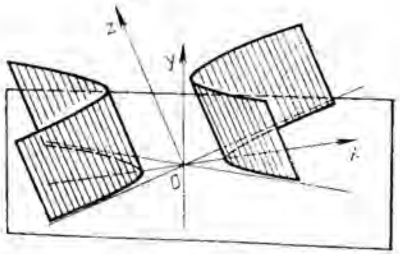


Рис. 5.10

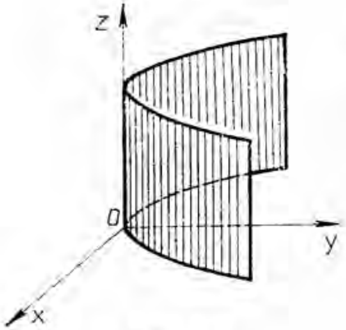


Рис. 5.11

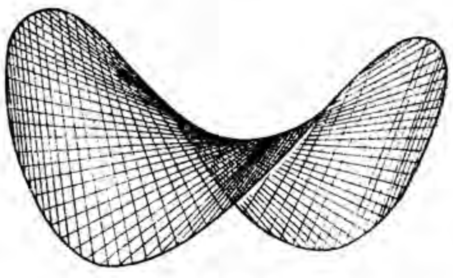


Рис. 5.12

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \qquad \text{(пара пересекающихся плоскостей);} \qquad (5.12)$$

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 \qquad \text{(пара параллельных плоскостей);} \qquad (5.13)$$

$$x^2 = 0 \qquad \text{(пара совпадающих плоскостей).} \qquad (5.14)$$

Замечание. Уравнение (5.3) при $a = b = c = R$ принимает вид

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \qquad (5.15)$$

Оно определяет сферу радиусом R с центром в начале координат.

Общее уравнение второй степени относительно декартовых координат x, y, z может быть приведено либо к одному из уравнений (5.3)—(5.15), либо к одному из следующих уравнений:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1, \qquad (5.16)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0, \qquad (5.17)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1, \qquad (5.18)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0, \qquad (5.19)$$

$$\frac{x^2}{a^2} = -1. \qquad (5.20)$$

Уравнениям (5.16), (5.18) и (5.20) не удовлетворяют координаты ни одной точки пространства, уравнению (5.17) удовлетворяют координаты единственной точки $O(0, 0, 0)$, уравнению (5.19) — координаты точек, лежащих на прямой $x = 0$, $y = 0$.

Прямые, полностью лежащие на некоторой поверхности, называются *прямолинейными образующими* данной поверхности.

Однополостный гиперболоид (5.4) имеет два семейства прямолинейных образующих (см. рис. 5.4):

$$\left.\begin{aligned} \alpha\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) &= \beta\left(1 - \frac{y}{b}\right), \\ \beta\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) &= \alpha\left(1 + \frac{y}{b}\right); \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} \alpha\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) &= \beta\left(1 + \frac{y}{b}\right), \\ \beta\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) &= \alpha\left(1 - \frac{y}{b}\right). \end{aligned}\right\}$$

Гиперболический параболоид (5.8) также имеет два семейства прямолинейных образующих (рис. 5.12):

$$\left.\begin{aligned} \alpha\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) &= \beta z, \\ \beta\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) &= 2\alpha; \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} \alpha\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) &= 2\beta, \\ \beta\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) &= \alpha z. \end{aligned}\right\}$$

При замене декартовой системы координат $Oxyz$ новой системой O_1XYZ с равнонаправленными осями старые координаты x, y, z любой точки выражаются через ее новые координаты X, Y, Z с помощью формул:

$$x = X + a, \quad y = Y + b, \quad z = Z + c,$$

где a, b, c — координаты начала O_1 новой системы в старой системе.

Новые координаты точки выражаются через ее старые с помощью формул:

$$X = x - a, \quad Y = y - b, \quad Z = z - c.$$

Примеры. 1. Найти центр и радиус сферы, заданной уравнением

$$2x^2+2y^2+2z^2-4x+8y-12z+19=0.$$

Разделим почленно данное уравнение на 2 и выделим полные квадраты:

$$x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+19/2=0,$$

$$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9/2.$$

Перейдем к новым координатам по формулам: $X=x-1$, $Y=y+2$, $Z=z-3$.

В новой системе координат уравнение принимает вид

$$X^2+Y^2+Z^2=9/2.$$

Оно определяет сферу радиусом $R=3/\sqrt{2}$ с центром в точке, для которой $X=0$, $Y=0$, $Z=0$ или $x-1=0$, $y+2=0$, $z-3=0$, т. е. $x=1$, $y=-2$, $z=3$.

Следовательно, центр данной сферы находится в точке $C(1, -2, 3)$ и радиус $R=2/\sqrt{2}$.

2. Определить вид и параметры поверхности, заданной уравнением $4x^2+9y^2+36z^2-16x+18y-72z+25=0$.

Вынося за скобки коэффициенты при квадратах координат и преобразуя уравнение, получаем:

$$4(x^2-4x+4)+9(y^2+2y+1)+36(z^2-2z+1)-16-9-36+25=0,$$

$$4(x-2)^2+9(y+1)^2+36(z-1)^2=36.$$

В новой системе координат $X=x-2$, $Y=y+1$, $Z=z-1$ это уравнение принимает вид

$$4X^2+9Y^2+36Z^2=36$$

или

$$\frac{X^2}{9}+\frac{Y^2}{4}+\frac{Z^2}{1}=1.$$

Сравнивая полученное уравнение с уравнением (5.3), заключаем, что оно определяет эллипсоид, параметры которого $a=3$, $b=2$, $c=1$. Центр эллипсоида находится в точке $C(2, -1, 1)$.

5.25. Записать уравнение сферы в каждом из следующих случаев:

1) сфера имеет центр $C(0, 0, 0)$ и радиус $R=8$;
2) сфера имеет центр $C(4, -5, -8)$ и радиус $R=6$;
3) сфера проходит через начало координат и имеет центр $C(3, -6, 6)$;
4) точки $A(3, -5, 10)$ и $B(1, -7, -2)$ являются концами одного из диаметров сферы.

5.26. Записать уравнение сферы в каждом из следующих случаев:

1) сфера проходит через точку $A(5, -4, 1)$ и имеет центр в точке $C(2, -7, -3)$;
2) центр сферы находится в начале координат, плоскость $6x-2y+3z-21=0$ является касательной к сфере;
3) центр сферы находится в точке $C(8, -3, 4)$, плоскость $3x-4y+5z-6=0$ является касательной к сфере;
4) сфера проходит через три точки $P(3, 1, 5)$, $Q(4, -8, 1)$, $R(-5, 1, -3)$, центр ее лежит на плоскости $2x+y-z-1=0$.

5.27. Составить уравнение сферы, проходящей через четыре точки $P(6, 1, 4)$, $Q(2, -2, -5)$, $R(7, 1, 3)$, $S(1, -3, 7)$.

5.28. Какое геометрическое место точек определяется каждым из уравнений:

1) $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-11=0$;
2) $x^2+y^2+z^2+4x-2y+6z+30=0$;
3) $x^2+y^2+z^2-6x+2y-4z+14=0$;
4) $2x^2+2y^2+2z^2-12x-10y+8z+1=0$?

5.29. Исследовать, как расположены точки $P(1, 1, 3)$, $Q(4, -4, 2)$, $R(3, -1, -6)$, $S(-1, 1, 6)$ относительно каждой из сфер:

1) $(x+1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=16$;
2) $(x-3)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=25$;
3) $2x^2+2y^2+2z^2-4x+8y-12z+19=0$.

5.30. Исследовать взаимное расположение сферы $x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z-43=0$ и каждой из прямых:

1) $x=3+t$, $y=-4-t$, $z=5+2t$;
2) $x=1+t$, $y=-2+t$, $z=2+t$;
3) $x=-2+2t$, $y=4+2t$, $z=3-3t$;
4) $x=4-3t$, $y=5+4t$, $z=6-5t$.

В задачах 5.31, 5.32 найти прямолинейные образующие данной поверхности в указанной точке.

5.31. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{9}=1$, $M(5, -4, -3)$.

5.32. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=2z$, $M\left(3, -4, -\frac{3}{2}\right)$.

В задачах 5.33, 5.34 найти углы между прямолинейными образующими данной поверхности в указанной точке.

5.33. $-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=2z$, $M\left(2, -2, -\frac{3}{2}\right)$.

5.34. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$, $M(4, 3, -2)$.

В задачах 5.35—5.74 определить вид и параметры поверхности второго порядка, заданной указанным уравнением.

5.35. $3x^2+3y^2+3z^2-6x+9y-12z-7=0$.
5.36. $4x^2+4y^2+4z^2-8x+12y-16z-1=0$.
5.37. $3x^2+4y^2+6z^2-6x+16y-36z+49=0$.
5.38. $2x^2+3y^2-6z^2-8x-6y-12z-1=0$.
5.39. $4x^2+9y^2+36z^2+8x+36y-72z+40=0$.
5.40. $x^2+2y^2-4z^2-6x+4y+32z-40=0$.
5.41. $x^2+2y^2+2z^2-2x+12y-8z+31=0$.
5.42. $2y^2+4z^2-x^2+2x-4y-8z-3=0$.
5.43. $x^2-2y^2+3z^2-4x+4y-6z-1=0$.
5.44. $x^2-4y^2+z^2-2x+12y-4z-3=0$.

5.45. $2x^2 + y^2 - z^2 + 16x - 2y + 4z + 17 = 0.$
5.46. $3x^2 + 4y^2 - 12x + 8y - 24z + 136 = 0.$
5.47. $6x^2 + 3y^2 - 2z^2 + 24x - 6y - 4z + 25 = 0.$
5.48. $2x^2 - 3y^2 + 12x + 12y - 12z - 42 = 0.$
5.49. $x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 4x + 4y - 8z + 10 = 0.$
5.50. $x^2 + 2y^2 + 6x - 18y + 8z + 49 = 0.$
5.51. $x^2 + 2y^2 - 4z^2 + 2x - 4y - 24z - 34 = 0.$
5.52. $3x^2 - 4y^2 + 6z^2 - 18x - 8y + 12z + 29 = 0.$
5.53. $-2x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 4x + 12y + 8z + 22 = 0.$
5.54. $2x^2 + 3y^2 + 16x - 18y - 12z + 47 = 0.$
5.55. $x^2 - 2y^2 + 6x + 4y - 8z + 47 = 0.$
5.56. $4x^2 + 9y^2 - 32x + 36y + 64 = 0.$
5.57. $2x^2 - 3y^2 - 12x - 6y + 3 = 0.$
5.58. $3x^2 + 2z^2 + 6x + 4y - 8z - 1 = 0.$
5.59. $3y^2 + 2z^2 - 4x^2 - 6y + 8z + 12x - 1 = 0.$
5.60. $4x^2 + 9z^2 - 8x + 18z - 23 = 0.$
5.61. $x^2 + 2y^2 + 4x - 4y + 10 = 0.$
5.62. $9x^2 - 4y^2 + 18x - 16y + 29 = 0.$
5.63. $z^2 - 2y^2 - 2z - 4y - 8x + 23 = 0.$
5.64. $z^2 + 2y^2 + 2z - 4y - 8x - 13 = 0.$
5.65. $x^2 + 4x - 6y + 22 = 0.$
5.66. $y^2 + 6y - 4x + 17 = 0.$ **5.67.** $x^2 - 8x + 7 = 0.$
5.68. $x^2 + 6x + 9 = 0.$ **5.69.** $x^2 - 4x + 5 = 0.$
5.70. $3x^2 - 4y^2 - 6z^2 - 18x - 8y - 12z + 17 = 0.$
5.71. $y^2 - 2z^2 + 2y + 4z - 5 = 0.$ **5.72.** $z^2 + 6z + 4y - 7 = 0.$
5.73. $2y^2 + z^2 - 4y + 2z - 1 = 0.$ **5.74.** $x^2 + 4x - 3z + 13 = 0.$
5.75. Доказать, что уравнение $z = xy$ определяет гиперболический параболоид.
5.76. Доказать, что уравнение $z^2 = xy$ определяет конус.

III. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

6. ФУНКЦИЯ

Понятие функции — одно из основных в современной математике. Возможность выражения зависимостей между различными величинами через математические функции является важным средством при решении теоретических и прикладных задач.

6.1. Понятие функции. Область определения функции

Переменная величина y называется *функцией* переменной величины x, если каждому значению x (которое она может принимать) соответствует единственное значение y. Переменная величина x при этом называется *независимой переменной* или *аргументом* функции. Обозначения функции: $y=f(x)$, $y=\varphi(x)$, $y=F(x)$, $y=\Phi(x)$, $y=y(x)$ и т. п. Функцию и ее аргумент можно обозначать и другими буквами, например $u=f(v)$, $s=\varphi(t)$, $x=f(t)$, $r=r(s)$ и т. д.

Множество всех значений аргумента, при которых функция принимает определенные действительные значения, называется *областью определения* этой функции. Множество всех значений функции называется *областью* ее *значений*.

Значение, которое функция $y=f(x)$ принимает при $x=a$, обозначается $f(a)$.

Корнем (или *нулем*) функции $y=f(x)$ называется значение аргумента $x=a$, при котором $f(a)=0$.

Если $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$ — функции своих аргументов, причем область определения функции f содержит область значений функции φ, то каждому x из области определения функции φ соответствует единственное y, такое, что $y=f(u)$, где $u=\varphi(x)$. Функция, заданная подобным образом, обозначается $y=f(\varphi(x))$ и называется *функцией от функции* или *сложной функцией*.

Замечание. Понятие функции иногда вводится иначе, как соответствие между двумя множествами.

Примеры. 1. Вычислить значение функции $f(x)=x^4-2x^3-x^2+2x$ при значении аргумента, равном среднему арифметическому ее корней.

Найдем сначала корни этой функции, т. е. значения x, при которых функция обращается в нуль:

$$x^4-2x^3-x^2+2x=0.$$

Разложив левую часть уравнения на множители, получим

$$x^3(x-2)-x(x-2)=x(x-2)(x^2-1)=x(x-2)(x-1)(x+1)=0,$$

откуда $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=1$, $x_4=2$.

Среднее арифметическое корней

$$\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}=\frac{-1+0+1+2}{4}=\frac{1}{2}.$$

Вычислим значение функции при $x=1/2$:

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^4-2\left(\frac{1}{2}\right)^3-\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\left(\frac{1}{2}\right)=$$
$$=\frac{1}{16}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1=\frac{9}{16}.$$

2. Найти область определения функции $y = \log(9 - x^2)$.

Логарифмическая функция определена при положительных значениях аргумента, поэтому $9 - x^2 > 0$, откуда $x^2 < 9$ или $|x| < 3$, т. е. $-3 < x < 3$. Следовательно, областью определения данной функции является интервал $(-3, 3)$.

3. Найти область определения функции $y = \arccos\frac{3x-1}{4}$.

Функция $y = \arccos u$ определена при $-1 \leqslant u \leqslant 1$, поэтому данная функция определена лишь при тех x, для которых

$$-1 \leqslant \frac{3x-1}{4} \leqslant 1,$$

откуда $-4 \leqslant 3x - 1 \leqslant 4$ или $-1 \leqslant x \leqslant 5/3$.

Итак, функция определена на отрезке $[-1, 5/3]$.

В задачах 6.1—6.16 найти область определения каждой функции.

6.1. $f(x) = x^3 - 7x + 6$. **6.2.** $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 5x + 4}$.

6.3. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{16 - x^2}$. **6.4.** $f(x) = \sqrt[4]{4 - x^2} + \sqrt[3]{x^2 - 16}$.

6.5. $f(x) = \ln(x - 2)$. **6.6.** $f(x) = \ln|x + 3|$.

6.7. $f(x) = \ln\left|\frac{x-4}{x+4}\right|$. **6.8.** $f(x) = 2 + \sqrt{\lg\sin x}$.

6.9. $f(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+3}$. **6.10.** $f(x) = \frac{2x+5}{x^2 - 6x + 5}$.

6.11. $f(x) = \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$. **6.12.** $f(x) = \sqrt{\cos x}$.

6.13. $f(x) = \lg\cos x$. **6.14.** $|f(x)| = \sin x$.

6.15 $f(x) = \arcsin\frac{4x-1}{3}$. **6.16.** $f(x) = \arccos\frac{5-2x}{4}$.

6.17. Доказать, что функции $f(x) = \lg(ax^2 + bx + c)$ и $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ имеют одну и ту же область определения.

6.18. Указать, какие из приведенных ниже функций являются четными, нечетными или не принадлежат к этим классам:

1) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 6$; 2) $f(x) = x^3 - 7x$; 3) $f(x) = x|x|$;

4) $f(x) = \frac{\sin x + |x|\sin x}{2}$; 5) $f(x) = \lg\cos 2x$; 6) $f(x) = 2^x$.

6.19. Дана функция $f(x) = 2/x$. Вычислить $f(2)$, $f(-2)$, $f(a)$. Доказать, что $f(x)f(1/x) = 4$.

6.20. Дана функция $f(x) = \log_3 x$. Вычислить $f(1)$, $f(1/3)$, $f(1/9)$, $f(\sqrt[3]{3})$, $f(27\sqrt[3]{3})$.

6.21. Дана функция $f(x) = 3x + 2$. Вычислить $f(1)$, $f(2)$, ..., $f(n)$. Доказать, что полученные числа образуют арифметическую прогрессию, и найти ее разность.

6.22. Дана функция $f(x) = 3^x$. Доказать, что если числа x_1, x_2, ..., x_n образуют арифметическую прогрессию с разностью d, то

числа $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_n)$ образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 3^d.

6.23. Дана функция $f(x) = \log_x 3$. Даказать, что если числа x_1, x_2, x_3, ..., x_n образуют геометрическую прогрессию со знаменателем q, то числа $\frac{1}{f(x_1)}$, $\frac{1}{f(x_2)}$, ..., $\frac{1}{f(x_n)}$ образуют арифметическую прогрессию. Найти разность этой прогрессии.

6.24. Дана функция $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$. Доказать, что

$$1)\ f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x); \quad 2)\ \frac{1}{x} f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 1.$$

6.25. Функция $f(x) = \pi(x)$ равна числу простых чисел среди натуральных от 1 до x. Найти $f(10)$, $f(20)$, $f(50)$, $f(100)$, $f(150)$, $f(200)$, $f(250)$, $f(300)$, $f(350)$.

6.2. График функции

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют данной функциональной зависимости, т. е. множество точек $M(x, f(x))$.

Графики суммы, разности, произведения и частного функций: $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, $\varphi(x) = f_1(x) - f_2(x)$, $F(x) = f_1(x) f_2(x)$, $\Phi(x) = f_1(x)/f_2(x)$ $(f_2(x) \neq 0)$ получаются из графиков функций $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ соответственно путем их сложения, вычитания, умножения и деления.

Примеры. 1. Построить график $y = \sqrt[3]{x}$ на отрезке $[-8, 8]$.

Данная функция определена при всех значениях x. Придавая x значения из указанного отрезка, составляем таблицу значений аргумента и функции (табл. 6.1).

Таблица 6.1.

x	-8	$-\frac{27}{8}$	-1	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{27}{8}$	8
y	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2

Построив точки $M_1(-8, -2)$, $M_2\left(-\frac{27}{8}, -\frac{3}{2}\right)$, $M_3(-1, -1)$, $M_4\left(-\frac{1}{8}, -\frac{1}{2}\right)$, $M_5(0, 0)$, $M_6\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right)$, $M_7(1, 1)$, $M_8\left(\frac{27}{8}, \frac{3}{2}\right)$, $M_9(8, 2)$ и соединив их плавной линией, получим график функции $y = \sqrt[3]{x}$ (рис. 6. 1).

2. Построить график функции $y = \sec x$.

Функция $y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$ определена при всех значениях x, за исключением тех, для которых $\cos x = 0$, т. е. $x = \frac{2k+1}{2}\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Данная функция четная, периодическая с периодом 2π. Построим ее график в интервале $(-\pi/2, \pi/2)$. При $x = 0$ $\cos 0 = 1$, $\sec 0 = 1$; получаем точку $M(0, 1)$ графика. Если x увеличивается, то y также увеличивается. При $x = \pi/3$ получим $y = 2$. Когда x стремится к $\pi/2$, y неограниченно возрастает. Аналогично изменяется y при отрицательных значениях x в указанном промежутке (функция четная, поэтому график симметричен относительно оси Oy). В интервале $(\pi/2, 3\pi/2)$ функция принимает отрицательные значения, причем $y(\pi) = -1$; y неограниченно возрастает по абсолютной величине, когда x стремится к $\pi/2$ (оставаясь больше этого значения) или к $3\pi/2$ (оставаясь меньше его). Принимая во внимание соображения симметрии и периодичности, строим график данной функции для других интервалов (рис. 6.2).

3. Построить график функции $f(x) = x + 1/x$.

Данную функцию можно представить в виде $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, где $f_1(x) = x$, $f_2(x) = 1/x$. Первая из этих функций определена при всех x, ее графиком является биссектриса первого и третьего координатных углов. Вторая функция не

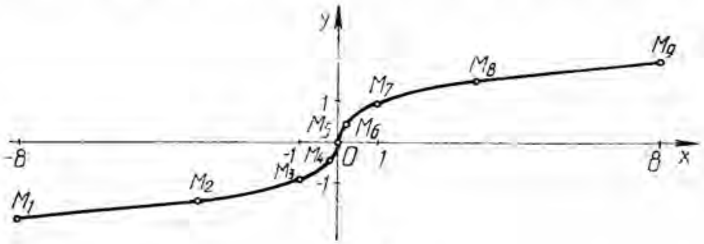


Рис. 6.1

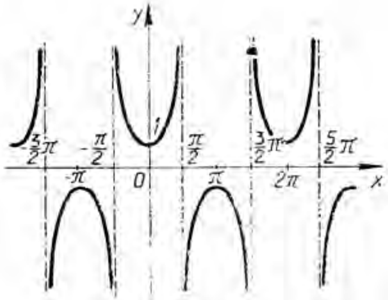


Рис. 6.2

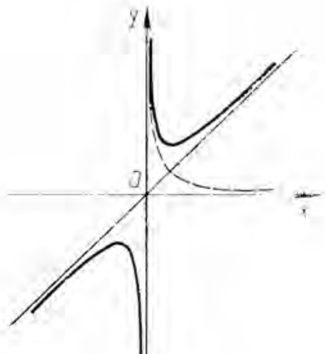


Рис. 6.3

определена лишь в одной точке $x = 0$, ее графиком является равносторонняя гипербола, асимптотами которой служат координатные оси.

График данной функции получается путем сложения графиков функций $f_1(x) = x$, $f_2(x) = 1/x$ (рис. 6.3).

4. Построить график функции $f(x) = -x\cos x$.

График этой функции получается путем умножения графиков функций $f_1(x) = -x$, $f_2(x) = \cos x$. Поскольку $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, то график функции $f(x) = -x\cos x$ полностью расположен между прямыми $y = -x$ и $y = x$, причем на прямой $y = -x$ лежат те его точки, для которых $\cos x = 1$, а на прямой $y = x$ — те точки, для которых $\cos x = -1$ (рис. 6.4).

5. Построить график функции $f(x) = \lg\sin x$.

Функция эта определена при x, для которых $\sin x > 0$, т. е. в интервалах $(2k\pi, (2k+1)\pi)$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Построим график данной функции в интервале $(0, \pi)$. При $x = \frac{\pi}{2}$ $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\lg\sin\frac{\pi}{2} = 0$; получили точку $M(\pi/2, 0)$. Когда $x \to +0$, $f(x) \to -\infty$; когда

$x \to \pi - 0$, $f(x) \to -\infty$. Принимая во внимание периодичность функции, строим ее график в других интервалах области определения (рис. 6.5).

В задачах 6.26—6.37 построить по точкам график функции.

6.26. $y = x^3$. **6.27.** $y = 1/x^2$. **6.28.** $y = 1/x^3$.

6.29. $y = x^4$. **6.30.** $y = x^5$. **6.31.** $y = x^6$.

6.32. $y = \sqrt{x+1}$. **6.33.** $y = \sqrt{x-2} - 3$.

6.34. $y = 5 - \sqrt{x+1}$. **6.35.** $y = 1/(x^2+1)$.

6.36. $y = x/(x^2+1)$. **6.37.** $y = x^2/(x^2+1)$.

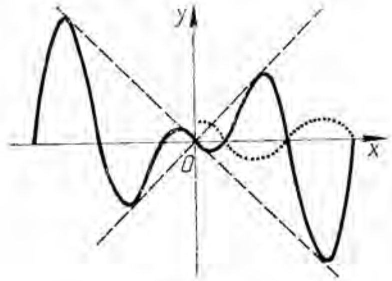


Рис. 6.4

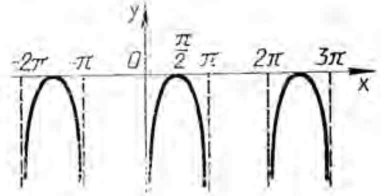


Рис. 6.5

В задачах 6.38—6.49 построить график функции (с помощью сложения, вычитания, умножения и деления).

6.38. $f(x) = x + \cos x$. **6.39.** $f(x) = x + \operatorname{tg} x$.

6.40. $f(x) = \sin x + \cos x$. **6.41.** $f(x) = x - 1/x$.

6.42. $f(x) = \cos x - x$. **6.43.** $f(x) = \sin x - \cos x$.

6.44. $f(x) = x \lg x$. **6.45.** $f(x) = -x\sin x$.

6.46. $f(x) = \cos x \lg x$. **6.47.** $f(x) = \operatorname{cosec} x$.

6.48. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. **6.49.** $f(x) = \dfrac{\cos x}{x}$.

В задачах 6.50—6.53 построить график функции (с помощью простейших преобразований).

6.50. 1) $y = \sin x + 3$; 2) $y = \cos x - 3$; 3) $y = \lg x + 1$.

6.51. 1) $y = \cos 3x$; 2) $y = \sin(x/2)$; 3) $y = \lg 2x$.

6.52. 1) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; 2) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; 3) $y = \lg(x - 4)$.

6.53. 1) $y = 3\sin 2x$; 2) $y = -2\cos 3x$; 3) $y = 4\cos(2x + 2)$.

В задачах 6.54—6.65 построить график функции.

6.54. $y = \lg\cos x$. **6.55.** $y = \sin^2 x$. **6.56.** $y = \sqrt{\cos x}$.

6.57. $y = |\sin x|$. **6.58.** $y = \cos|x|$. **6.59.** $y = |\operatorname{tg} x|$.

6.60. $y = |\sec x|$. **6.61.** $y = \operatorname{cosec}|x|$. **6.62.** $y = |\operatorname{cosec}|x||$.

6.63. $y = |x^2 - 3x + 2|$. **6.64.** $|y| = \sin x$. **6.65.** $|x| + |y| = 1$.

7. ПРЕДЕЛ

При решении разного рода задач широко используются понятия предела функции и предела последовательности.

7.1. Предел последовательности

Числовой последовательностью (или *последовательностью*) называется функция

$$a_n = \varphi(n), \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

заданная на множестве натуральных чисел. Каждое значение a_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, называется *элементом последовательности*, а число n — его *номером*. Для последовательности с общим членом a_n употребляются следующие обозначения: a_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$; (a_n); $\{a_n\}$.

Постоянная a называется *пределом последовательности* (a_n), если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что при всех $n > N$ выполняется неравенство

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Рис. 7.1

Обозначение предела последовательности (a_n): $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$; $a_n \to a$ при $n \to \infty$.

Если последовательности (a_n) и (b_n) имеют пределы, то пределы их суммы, разности, произведения и частного существуют и определяются по формулам:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n, \tag{7.1}$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n, \tag{7.2}$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n, \tag{7.3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} \quad (\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0). \tag{7.4}$$

Примеры. 1. Дана последовательность $a_n = 2 + 1/n$. Изобразить несколько первых ее членов на числовой прямой. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} (2 + 1/n) = 2$. Каким должно быть N, чтобы значения a_n $(n > N)$ отличались от 2 меньше, чем на ε: $\varepsilon_1 = 0{,}1$; $\varepsilon_2 = 0{,}01$?

Придавая n значения $1, 2, 3, \ldots, 10$, получаем:

$$a_1 = 2 + \frac{1}{1} = 3, \quad a_2 = 2 + \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}, \quad a_3 = 2\frac{1}{3}, \quad a_4 = 2\frac{1}{4},$$

$$a_5 = 2\frac{1}{5}, \quad a_6 = 2\frac{1}{6}, \quad a_7 = 2\frac{1}{7}, \quad a_8 = 2\frac{1}{8}, \quad a_9 = 2\frac{1}{9}, \quad a_{10} = 2{,}1.$$

Изобразив эти члены на числовой прямой (рис. 7.1), видим, что все соответствующие точки принадлежат отрезку $[2, 3]$. Чем больше n, тем ближе точка a_n к точке $a = 2$. Задав сколь угодно малое число $\varepsilon > 0$, можно указать такой номер N, что для всех $n > N$ точки a_n будут принадлежать ε-окрестности точки 2, т. е. будут лежать в открытом промежутке $(2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon)$.

Аналитическое доказательство того, что данная последовательность имеет предел, равный двум, состоит в следующем.

Рассмотрим разность

$$a_n - a = (2 + 1/n) - 2 = 1/n.$$

Задав произвольное $\varepsilon > 0$, можно указать такое целое число N, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $|1/n| < \varepsilon$. Действительно, последнее неравенство будет выполнено, если $1/n < \varepsilon$, откуда $n > 1/\varepsilon$. В качестве N можно взять одно из двух последовательных целых чисел, между которыми заключено число $1/\varepsilon$ (или само это число, если оно целое), в частности можно положить $N = E(1/\varepsilon)$, где $E(x)$ — целая часть от x.

Если $\varepsilon_1 = 0{,}1$, то $N_1 = E\left(\frac{1}{0{,}1}\right) = 10$; если $\varepsilon_2 = 0{,}01$, то $N_2 = E\left(\frac{1}{0{,}01}\right) = 100$.

2. Найти предел последовательности, общий член которой

$$a_n = \frac{6n - 1}{2n + 3}.$$

Разделим числитель и знаменатель дроби на n. Перейдя к пределу по формулам (7.1)—(7.4), получим

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{6n - 1}{2n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{6 - 1/n}{2 + 3/n} = \frac{6 - 0}{2 + 0} = \frac{6}{2} = 3.$$

Замечание. Здесь принято во внимание, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{c}{n} = 0$ $(c = \text{const})$ и предел постоянной равен самой постоянной.

3. Найти предел последовательности с общим членом

$$a_n = \frac{3n + 2}{5n^2 + 4n - 1}.$$

Разделив числитель и знаменатель на n^2 и перейдя к пределу, получим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n + 2}{5n^2 + 4n - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3/n + 2/n^2}{5 + 4/n - 1/n^2} = \frac{0 + 0}{5 + 0 - 0} = \frac{0}{5} = 0.$$

4. Найти предел последовательности с общим членом

$$a_n = \frac{2n + 7}{\sqrt{9n^2 - 6n + 5}}.$$

Разделим числитель и знаменатель дроби на n, внесем $1/n$ под знак квадратного корня, преобразуем подкоренное выражение:

$$a_n = \frac{\frac{1}{n}(2n + 7)}{\frac{1}{n}\sqrt{9n^2 - 6n + 5}} = \frac{2 + \frac{7}{n}}{\sqrt{9 - \frac{6}{n} + \frac{5}{n^2}}},$$

Перейдя к пределу, получим

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2 + \frac{7}{n}}{\sqrt{9 - \frac{6}{n} + \frac{5}{n^2}}} = \frac{2}{3}.$$

В задачах 7.1—7.6 записать первые пять членов последовательности, заданной выражением для общего члена.

7.1. $a_n = \frac{n-1}{n}$. **7.2.** $a_n = \frac{n+(-1)^n}{n}$. **7.3.** $a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

7.4. $a_n = \frac{1}{(2n-1)3^{n-1}}$. **7.5.** $a_k = 2^{k-(-1)^k}$. **7.6.** $a_k = 2^{(-1)^k-k}$.

7.7. Найти формулу для общего члена последовательности, у которой члены с четными номерами равны нулю, а члены с нечетными номерами равны единице.

7.8. Найти общий член последовательности, составленной из положительных корней уравнения $\mathrm{tg}\, \pi x = 1$.

В задачах 7.9—7.14 определить, какие из последовательностей: ограничены сверху; ограничены снизу; ограничены.

7.9. $a_n = \frac{n+1}{n+2}$. **7.10.** $a_n = \frac{n+1}{n^2+1}$. **7.11.** $a_n = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{n}\right)$.

7.12. $a_n = n+3$. **7.13.** $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. **7.14.** $a_n = \frac{n}{2^n}$.

В задачах 7.15—7.22 определить, какие из указанных последовательностей являются возрастающими, убывающими, а какие из них не являются монотонными.

7.15. $a_n = \frac{1}{n+1}$. **7.16.** $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$. **7.17.** $a_n = \frac{n+2}{n+3}$.

7.18. $a_n = \lg(1+n)$. **7.19.** $a_n = 2^n$. **7.20.** $a_n = 3^{-n}$.

7.21. $a_n = n^2 - 5n + 4$. **7.22.** $a_n = \sin(1/n^2)$.

7.23. Может ли быть ограниченной последовательностью:

1) сумма двух неограниченных последовательностей;

2) произведение двух неограниченных последовательностей;

3) произведение ограниченной и неограниченной последовательностей;

4) частное двух неограниченных последовательностей?

7.24. Может ли быть неограниченной последовательностью:

1) произведение ограниченной и неограниченной последовательностей;

2) частное двух ограниченных последовательностей?

7.25. Может ли быть монотонной последовательностью:

1) сумма двух немонотонных последовательностей;

2) произведение двух немонотонных последовательностей?

7.26. Может ли быть сходящейся последовательностью:

1) сумма (разность) двух расходящихся последовательностей;

2) произведение двух расходящихся последовательностей?

В задачах 7.27—7.30 изобразить последовательности на координатной оси; установить, какие из них имеют предел (сходятся) и какие не имеют (расходятся). Найти пределы сходящихся последовательностей.

7.27. 1) $a_n = \frac{1}{n}$; 2) $b_n = -\frac{1}{n}$; 3) $c_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

7.28. 1) $a_n = \frac{1}{n^2}$; 2) $b_n = -\frac{1}{n^2}$; 3) $c_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$.

7.29. 1) $a_n = n$; 2) $b_n = -n$; 3) $c_n = (-1)^n n$.

7.30. 1) $a_n = \frac{n-1}{n}$; 2) $b_n = \frac{n+1}{2n}$; 3) $c_n = \frac{4n-1}{n+1}$.

В задачах 7.31, 7.32 выяснить, начиная с какого номера все члены последовательности $\{a_n\}$ находятся в указанной ε-окрестности точки O.

7.31. $a_n = -1/n$, $\varepsilon_1 = 0{,}1$, $\varepsilon_2 = 0{,}01$, $\varepsilon_3 = 0{,}001$, $\varepsilon > 0$.

7.32. $a_n = 1/n^2$, $\varepsilon_1 = 0{,}01$, $\varepsilon_2 = 0{,}0001$, $\varepsilon > 0$.

7.33. Сколько членов последовательности, определяемой формулой $a_n = (-1)^n/n$, находится вне ε-окрестности точки O:

1) $\varepsilon = 0{,}1$; 2) $\varepsilon = 1/(5\sqrt{2})$; 3) $\varepsilon = \pi/\sqrt{82}$; 4) $\varepsilon = \sqrt{2}/100$?

7.34. Сколько членов последовательности, определяемой формулой $a_n = (-1)^n/n^2$, находится вне ε-окрестности точки O:

1) $\varepsilon = 1/18$; 2) $\varepsilon = 1/630$; 3) $\varepsilon = 1/1025$?

В задачах 7.35—7.38 доказать равенство, использовав определение предела.

7.35. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n+2}{5n-3} = \frac{3}{5}$. **7.36.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n-1} = \frac{2}{3}$.

7.37. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{n^2+1} = 0$. **7.38.** $\lim\limits_{n\to\infty} 3^{-n} = 0$.

В задачах 7.39—7.50 с помощью теорем о пределе суммы, разности, произведения и частного двух последовательностей вычислить предел последовательности.

7.39. $a_n = \frac{n+1}{2n-1}$. **7.40.** $a_n = \frac{4n-3}{6n+1}$.

7.41. $a_n = \frac{2n-1}{n^2+1}$. **7.42.** $a_n = \frac{3n^2+2n-3}{2n^2-n+4}$.

7.43. $a_n = \frac{n^2+5n-2}{3n^3-2n+7}$. **7.44.** $a_n = \frac{n^3+n}{n^2+3n-2}$.

7.45. $a_n = \frac{3n-1}{\sqrt{16n^2+2n-5}}$. **7.46.** $a_n = \frac{6n-5}{\sqrt[3]{8n^3+4n^2-7}}$.

7.47. $a_n = \frac{2n+3}{\sqrt[4]{81n^4+n^3}}$. **7.48.** $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

7.49. $a_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$. **7.50.** $a_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\sqrt{n+2}$.

В задачах 7.51—7.59 найти предел последовательности.

7.51. $a_n = \frac{1+2+3\ldots+n}{n^2-1}$. **7.52.** $a_n = \frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3}$.

7.53. $a_n = \frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{1+2+3+\ldots+n}$.

7.54. $a_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$.

7.55. $x_n = \frac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \ldots + a_k}{b_0 n^k + b_1 n^{k-1} + \ldots + b_k}$.

7.56. $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n}{n^2}$.

7.57. $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(2n)^2}$.

7.58. $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2n}}$.

7.59. $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$.

7.2. Предел функции

Постоянная b называется *пределом функции* $y = f(x)$ при $x \to a$ (или в точке a), если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что при всех x, удовлетворяющих условию

$$0 < |x - a| < \delta,$$

выполняется неравенство

$$|f(x) - b| < \varepsilon.$$

Обозначения предела функции $f(x)$ при $x \to a$ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$; $f(x) \to b$ при $x \to a$.

Рассматривают также *односторонние пределы функции:* предел слева $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = b_1$ (x стремится к a, оставаясь меньше a) и предел справа $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = b_2$ (x стремится к a, оставаясь больше a). Если односторонние пределы равны, т. е. $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = b$, то предел функции $f(x)$ в точке a существует и равен b: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$. Если односторонние пределы функции различны или хотя бы один из них не существует, то не существует и предел функции в соответствующей точке.

Если c — постоянная величина, то

$$\lim_{x\to a} c = c. \qquad (7.5)$$

Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют пределы при $x \to a$, то:

$$\lim_{x\to a} (f(x) \pm \varphi(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} \varphi(x), \qquad (7.6)$$

$$\lim_{x\to a} (f(x)\,\varphi(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} \varphi(x), \qquad (7.7)$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} \varphi(x)} \quad (\lim_{x\to a} \varphi(x) \neq 0). \qquad (7.8)$$

Из формулы (7.7) следует, что:

$$\lim_{x\to a} (cf(x)) = c \lim_{x\to a} f(x) \quad (c = \text{const}), \qquad (7.9)$$

$$\lim_{x\to a} (f(x))^m = (\lim_{x\to a} f(x))^m, \qquad (7.10)$$

$$\lim_{x\to a} x^m = a^m, \qquad (7.11)$$

где m — натуральное число.

Если $\sqrt[m]{\lim f(x)}$ существует, то

$$\lim_{x\to a} \sqrt[m]{f(x)} = \sqrt[m]{\lim_{x\to a} f(x)}. \qquad (7.12)$$

Примеры. 1. Найти предел целой рациональной функции при x, стремящемся к данной постоянной величине.

Рассмотрим целую рациональную функцию, т. е. многочлен степени n

$$P_n(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n.$$

Если $x \to a$, то в соответствии с формулами (7.5), (7.6), (7.9) и (7.11) получаем

$$\lim_{x\to a} P_n(x) = \lim_{x\to a} (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n) =$$
$$= \lim_{x\to a} b_0 + \lim_{x\to a} b_1x + \lim_{x\to a} b_2x^2 + \ldots + \lim_{x\to a} b_nx^n =$$
$$= \lim_{x\to a} b_0 + b_1 \lim_{x\to a} x + b_2 \lim_{x\to a} x^2 + \ldots + b_n \lim_{x\to a} x^n =$$
$$= b_0 + b_1a + b_2a^2 + \ldots + b_na^n = P_n(a).$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to a} P_n(x) = P_n(a)$, т. е. предел многочлена равен значению его в предельной точке. Например,

$$\lim_{x\to 3} (x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 2) = 3^4 - 3\cdot 3^3 + 4\cdot 3^2 - 5\cdot 3 + 2 = 23.$$

2. Найти предел дробной рациональной функции при x, стремящемся к данной постоянной величине.

Рассмотрим дробную рациональную функцию, т. е. отношение двух многочленов

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n}{c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_mx^m}.$$

Если $x \to a$ и $Q_m(a) \neq 0$, то в соответствии с формулой (7.8) и результатом предыдущего примера находим

$$\lim_{x\to a} R(x) = \frac{\lim\limits_{x\to a} P_n(x)}{\lim\limits_{x\to a} Q_m(x)} = \frac{P_n(a)}{Q_m(a)}.$$

Например,

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 4x^2 + 3x + 18}{x^2 + 5x - 12} = \frac{2^3 - 4\cdot 2^2 + 3\cdot 2 + 18}{2^2 + 5\cdot 2 - 12} = \frac{16}{2} = 8.$$

Замечания. 1. В случае, когда $P_n(a) \neq 0$, $Q_m(a) = 0$, получаем $\lim\limits_{x\to a} R(x) = \infty$.

2. В случае, когда $P_n(a) = 0$, $Q_m(a) = 0$, получаем неопределенность вида $\frac{0}{0}$, которую нужно раскрыть, т. е. исследовать дополнительно изменение $R(x)$ при $x \to a$.

3. Найти $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2 - 3x + 2}$.

Поскольку $\lim\limits_{x\to 1} (x^2 - 3x + 2) = 0$, $\lim\limits_{x\to 1} (x^3 + 2x^2 - x - 2) = 0$, то имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Раскроем эту неопределенность. Разлагая на множители числитель и знаменатель, находим:

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x-1)(x^2 + 3x + 2),$$
$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2).$$

Подставляя эти выражения в исходную дробь, сокращая на множитель $(x-1)$ и переходя к пределу при $x \to 1$, получаем

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2 + 3x + 2)}{(x-1)(x-2)} =$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x - 2} = \frac{6}{-1} = -6.$$

Замечание. Чтобы раскрыть неопределенность вида $\frac{0}{0}$, заданную отношением двух многочленов, необходимо предварительно выделить критический множитель (т. е. множитель, равный нулю при предельном значении x), сократить на него, а затем перейти к пределу.

4. Найти $\lim\limits_{x\to 4} \frac{16-x^2}{\sqrt{5+x}-3}$.

Когда $x\to 4$, числитель и знаменатель дроби стремятся к нулю, получается неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Желая избавиться от иррациональности в знаменателе, преобразуем данное выражение:

$$\frac{16-x^2}{\sqrt{5+x}-3}=\frac{(16-x^2)(\sqrt{5+x}+3)}{(\sqrt{5+x}-3)(\sqrt{5+x}+3)}=\frac{(16-x^2)(\sqrt{5+x}+3)}{5+x-9}=$$

$$=\frac{(4-x)(4+x)(\sqrt{5+x}+3)}{x-4}=-(x+4)(\sqrt{5+x}+3).$$

Перейдя к пределу с учетом формулы (7.12), найдем

$$\lim_{x\to 4}\frac{16-x^2}{\sqrt{5+x}-3}=-\lim_{x\to 4}(x+4)(\sqrt{5+x}+3)=-8\cdot 6=-48.$$

5. Найти предел дробной рациональной функции при x, стремящемся к бесконечности.

Рассмотрим дробную рациональную функцию

$$R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n}{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_mx^m}\quad (b_n\neq 0,\ \ a_m\neq 0).$$

Преобразуем это выражение:

$$R(x)=\frac{x^n\left(\frac{b_0}{x^n}+\frac{b_1}{x^{n-1}}+\frac{b_2}{x^{n-2}}+\ldots+b_n\right)}{x^m\left(\frac{a_0}{x^m}+\frac{a_1}{x^{m-1}}+\frac{a_2}{x^{m-2}}+\ldots+a_m\right)}=x^{n-m}Q(x),$$

где

$$Q(x)=\frac{\frac{b_0}{x^n}+\frac{b_1}{x^{n-1}}+\frac{b_2}{x^{n-2}}+\ldots+b_n}{\frac{a_0}{x^m}+\frac{a_1}{x^{m-1}}+\frac{a_2}{x^{m-2}}+\ldots+a_m}.$$

Искомый предел равен произведению двух пределов:

$$\lim_{x\to\infty}R(x)=\lim_{x\to\infty}x^{n-m}\lim_{x\to\infty}Q(x). \tag{1}$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{c}{x^k}=0$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$, то

$$\lim_{x\to\infty}Q(x)=b_n/a_m. \tag{2}$$

Далее

$$\lim_{x\to\infty}x^{n-m}=\begin{cases}\infty, & \text{если } n>m,\\ 1, & \text{если } n=m,\\ 0, & \text{если } n<m.\end{cases} \tag{3}$$

По формуле (1), принимая во внимание формулы (2) и (3), получаем

$$\lim_{x\to\infty}R(x)=\begin{cases}\infty, & \text{если } n>m,\\ b_n/a_m, & \text{если } n=m,\\ 0, & \text{если } n<m.\end{cases}$$

Замечание. Полученный результат можно сформулировать следующим образом: предел дробной рациональной функции при $x\to\infty$ равен отношению коэффициентов при старших членах, если степени числителя и знаменателя одинаковы, и равен нулю или бесконечности, если степень числителя соответственно меньше или больше степени знаменателя.

В задачах 7.60—7.89 найти предел функции в указанной точке.

7.60. $\lim\limits_{x\to 1}(x^3-3x^2+4x+5)$. **7.61.** $\lim\limits_{x\to 2}(x^4-4x^2+5x-7)$.

7.62. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2-6x+3}{x+4}$. **7.63.** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+5x^2-2x+4}{x^2-5x+6}$.

7.64. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+x^2+x+1}{x^2-x-2}$. **7.65.** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2-x+2}{x^2-4x+3}$.

7.66. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1}$. **7.67.** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x^5-1}$.

7.68. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-3x^2-2x+1}{x^2-5x+6}$. **7.69.** $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^4-4x^3+x^2-2x+8}{x^2+2x+3}$.

7.70. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^4-5x^3+4x^2-7}{x^4+6x^2-8}$. **7.71.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^5-6x^4+5x^3-2x^2+3x-1}{4x^5+3x^3-x^2+9}$.

7.72. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^6+2x^4-x^3-3}{x^7-4x^5+x^2+4}$. **7.73.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^7+5x^2-21x+14}{x^6-4x^4+3x^2-20}$.

7.74. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+1}{2+\sqrt{x^4+2x^2+3}}$. **7.75.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x-7}{3-4\sqrt{x^2+2}}$.

7.76. $\lim\limits_{x\to 2}\lg(4x-1+\sqrt{2x+5})$. **7.77.** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2+6x+1}}{x^2-3x+1}$.

7.78. $\lim\limits_{x\to 1}\left[3x+\sqrt{10x^2-1}+\lg\left(\sqrt[3]{2x^2+11x-5}+\frac{7x^2+1}{x^2-x+1}\right)\right]$.

7.79. $\lim\limits_{x\to 2}\left[\sqrt[3]{6x^2-2x+7}+\lg\left(\frac{\sqrt[4]{20x^3+15x^2+36}+x^5+2x^4+4x^3}{x^2-2x+1}\right)\right]$.

7.80. $\lim\limits_{x\to 6}\frac{36-x^2}{\sqrt{x+3}-3}$. **7.81.** $\lim\limits_{x\to 7}\frac{49-x^2}{1-\sqrt{8-x}}$.

7.82. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{\sqrt{x+3}-2}$. **7.83.** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{\sqrt{14+x}-4}$.

7.84. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1}$. **7.85.** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x^m-1}$.

7.86. $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}$. **7.87.** $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x^m-a^m}$.

7.88. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[5]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$. **7.89.** $\lim\limits_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[4]{2x}-2}$.

7.3. Некоторые важные пределы

Широко используются два замечательных предела.
1. Если угол α выражен в радианах, то

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1. \qquad (7.13)$$

2. *Числом* e называется предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

или

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha}=e. \qquad (7.14)$$

При нахождении многих пределов применяются также другие важные пределы:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e, \qquad (7.15)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a, \qquad (7.16)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha. \qquad (7.17)$$

Частными случаями формул (7.15) и (7.16) являются соответственно формулы:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1, \qquad (7.18)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1. \qquad (7.19)$$

Примеры. 1. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} bx}{x}$.

Поскольку $\operatorname{tg} bx=\dfrac{\sin bx}{\cos bx}$ и $\lim\limits_{x\to 0}\cos bx=\cos 0=1$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} bx}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\,\frac{\sin bx}{\cos bx}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos bx}\lim_{x\to 0}\frac{\sin bx}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos bx}\cdot b\lim_{x\to 0}\frac{\sin bx}{bx}=b\cdot 1\cdot 1=b.$$

2. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} ax}{\operatorname{tg} bx}$.

Разделив числитель и знаменатель дроби на x и приняв во внимание результат предыдущего примера, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} ax}{\operatorname{tg} bx}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\operatorname{tg} ax}{x}}{\dfrac{\operatorname{tg} bx}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} ax}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} bx}{x}}=\frac{a}{b}.$$

3. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}(1-b/x)^x$.

Так как $(1-b/x)\to 1$ при $x\to\infty$, имеем неопределенность вида 1^∞. Чтобы раскрыть ее (т. е. выяснить изменение данной функции при $x\to\infty$), введем новую переменную по формуле $-b/x=\alpha$, откуда $x=-b/\alpha$; $\alpha\to 0$, когда $x\to\infty$.

Следовательно,

$$\lim_{x\to\infty}(1-b/x)^x=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{-b/\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}[(1+\alpha)^{1/\alpha}]^{-b}.$$

Воспользовавшись свойством (7.10), по формуле (7.14) получим

$$\lim_{x\to\infty}(1-b/x)^x=\lim_{\alpha\to 0}[(1+\alpha)^{1/\alpha}]^{-b}=[\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha}]^{-b}=e^{-b}.$$

Итак,

$$\lim_{x\to\infty}(1-b/x)^x=e^{-b}.$$

В частности, при $b=2$ получаем $\lim\limits_{x\to\infty}(1-2/x)^x=e^{-2}$; при $b=-3$ имеем $\lim\limits_{x\to\infty}(1+3/x)^x=e^3$.

4. Найти $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2y}-1}{y}$.

Преобразуя данную функцию, вводя новую переменную $x=2y$ и применяя формулу (7.17), находим

$$\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt{1+2y}-1}{y}=\lim_{y\to 0}2\,\frac{(1+2y)^{1/2}-1}{2y}=2\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/2}-1}{x}=2\cdot\frac{1}{2}=1.$$

5. Найти $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\ln(1+3y)}{y}$.

Преобразуя эту функцию, вводя новую переменную $x=3y$ и применяя формулу (7.18), получаем

$$\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+3y)}{y}=\lim_{y\to 0}3\,\frac{\ln(1+3y)}{3y}=3\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=3\cdot 1=3.$$

6. Найти $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{e^{y/2}-1}{y}$.

После соответствующих преобразований по формуле (7.19) находим

$$\lim_{y\to 0}\frac{e^{y/2}-1}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{e^{y/2}-1}{2y/2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

В задачах 7.90—7.131 найти предел функции.

7.90. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+3/x)^x$.

7.91. $\lim\limits_{x\to\infty}(1-2/x)^x$.

7.92. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{1/x}$.

7.93. $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{1/x}$.

7.94. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x/4)}{x}$.

7.95. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{x}$.

7.96. $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\sin\dfrac{1}{x^2}$.

7.97. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} ax}{\sin bx}$.

7.98. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^4(x/2)}{x^4}$.

7.99. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x+16}-4}$.

7.100. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{5-\sqrt{x+25}}$.

7.101. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-2)}{x^3-8}$.

7.102. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin(x-3)}{27-x^3}$.

7.103. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sin(x+1)}{x^2-1}$.

7.104. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x/5)}{x}\right)^{x+2}$.

7.105. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{x}\right)^{x-2}$.

7.106. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{4x+5}\right)^{x}$.

7.107. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x+3}{2x-1}\right)^{x}$.

7.108. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{x}$.

7.109. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+8}{3x+2}\right)^{x}$.

7.110. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-3}\right)^{x+5}$.

7.111. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x-3}{4x+5}\right)^{x-6}$.

7.112. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1+4x}$.

7.113. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 4x)^{1/\sin^2 2x}$.

7.114. $\lim\limits_{y\to 0}\frac{\log_2(1+5y)}{y}$.

7.115. $\lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{\log_3(1-3y)}$.

7.116. $\lim\limits_{y\to 0}\frac{2^{3y}-1}{y}$.

7.117. $\lim\limits_{y\to 0}\frac{2y}{3^{y/2}-1}$.

7.118. $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+4t}-1}{t}$.

7.119. $\lim\limits_{t\to 0}\frac{3t}{\sqrt[4]{1-2t}-1}$.

7.120. $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+7t)}{t}$.

7.121. $\lim\limits_{t\to 0}\frac{4t}{\ln(1-3t)}$.

7.122. $\lim\limits_{t\to 0}\frac{e^{-2t}-1}{3t}$.

7.123. $\lim\limits_{t\to 0}\frac{2t}{e^{3t}-1}$.

7.124. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(x^3-3x+3)}{x-1}$.

7.125. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\ln(x^2-x-5)}{x+2}$.

7.126. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4^x-2^x}{x}$.

7.127. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{16^x-4^x}{x}$.

7.128. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{1+\sin x}-1}{x}$.

7.129. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{1+x^3}-1}{x^3}$.

7.130. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x-\sin 2x}{\sin x}$.

7.131. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin 4x-\cos 4x}$.

7.4. Разные примеры нахождения пределов

При нахождении пределов могут встретиться неопределенности вида $\infty-\infty$ и $0\cdot\infty$. Каждый из этих случаев путем преобразования данной функции можно привести к неопределенности вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$. Покажем на примерах, как находятся такие пределы.

Примеры. 1. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+8x+9}-x)$.

Умножив и разделив данную функцию на $\sqrt{x^2+8x+9}+x$, получим

$$\sqrt{x^2+8x+9}-x=\frac{(\sqrt{x^2+8x+9}-x)(\sqrt{x^2+8x+9}+x)}{\sqrt{x^2+8x+9}+x}=$$

$$=\frac{(x^2+8x+9)-x^2}{\sqrt{x^2+8x+9}+x}=\frac{8x+9}{\sqrt{x^2+8x+9}+x}.$$

Переходя к пределу, находим

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+8x+9}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{8x+9}{\sqrt{x^2+8x+9}+x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{8+9/x}{\sqrt{1+8/x+9/x^2}+1}=\frac{8}{1+1}= .$$

2. Найти $\lim\limits_{x\to 0}x\operatorname{ctg}2x$.

Здесь имеем неопределенность вида $0\cdot\infty$. Запишем данную функцию в другом виде и перейдем к пределу:

$$\lim_{x\to 0}x\frac{\cos 2x}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin 2x}\cos 2x=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin 2x}\lim_{x\to 0}\cos 2x=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 2x}\lim_{x\to 0}\cos 2x=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

В задачах 7.132—7.171 найти предел.

7.132. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+10x-9}-x)$.

7.133. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2+8x-7}-\sqrt{x^2+4x})$.

7.134. $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2+6x+3})$.

7.135. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+12x}-\sqrt{9x^2+18x-5})$.

7.136. $\lim\limits_{x\to -1}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{2}{1-x^2}\right)$.

7.137. $\lim\limits_{x\to -2}\left(\frac{20}{4-x^2}-\frac{5}{x+2}\right)$.

7.138. $\lim\limits_{x\to 5}\left(\frac{1}{x-5}-\frac{10}{x^2-25}\right)$.

7.139. $\lim\limits_{x\to 6}\left(\frac{12}{x^2-36}-\frac{1}{x-6}\right)$.

7.140. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 4x}-\frac{1}{4\sin^2 2x}\right)$.

7.141. $\lim\limits_{x\to 0}x\operatorname{ctg}\frac{x}{5}$.

7.142. $\lim\limits_{x\to 3}(3-x)\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}x$.

7.143. $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right)$.

7.144. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\operatorname{tg}2x$.

7.145. $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$.

7.146. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x})$.

7.147. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-x^2+1})$.

7.148. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt[3]{1-x^3})$.

7.149. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2})$.

7.150. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\operatorname{tg}x}\right)$.

7.151. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{e^x-e}{x-1}$.

7.152. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{mx}-1}{nx}$.

7.153. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+mx)}{nx}$.

7.154. $\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}$.

7.155. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

7.156. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}$.

7.157. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$.

7.158. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+nx)^{\alpha}-1}{mx}$.

7.159. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-kx)^{\alpha}-1}{nx}$.

7.160. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{64-x^2}{\sqrt[3]{x}-2}$.

7.161. $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{\sqrt[3]{x}+2}$.

7.162. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

7.163. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$.

7.164. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$.

7.165. $\lim\limits_{x\to 27}\dfrac{x-27}{\sqrt[3]{x}-3}$.

7.166. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{1+x}-3}{2-\sqrt[3]{x}}$.

7.167. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{1+x^2}-1}{x^2}$.

7.168. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-3x+2}{2-\sqrt[3]{x}}$.

7.169. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2-4x+3}$.

7.170. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2x^2}{x^2-1}\right)$.

7.171. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$.

7.5. Бесконечно малая функция

Функция $\alpha=\alpha(x)$ называется *бесконечно малой при* $x\to a$, если ее предел в точке a равен нулю:

$$\lim_{x\to a}\alpha(x)=0.$$

Аналогично определяется бесконечно малая функция при $x\to\infty$.

Две бесконечно малые функции $\alpha=\alpha(x)$, $\beta=\beta(x)$ при $x\to a$ называются *бесконечно малыми одного порядка*, если их отношение имеет предел, отличный от нуля:

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c\quad(c\neq 0).$$

Если $c=0$, то $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой высшего порядка* по сравнению с $\beta(x)$. Если $\alpha(x)$ и $\beta^n(x)$ — бесконечно малые одного порядка, то $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой n-го порядка по сравнению с* $\beta(x)$.

Если $c=1$, т. е.

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1,$$

то бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *равносильными* или *эквивалентными*. Эквивалентность бесконечно малых обозначается символом $\sim$: $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

Для того чтобы две бесконечно малые функции были эквивалентными, необходимо и достаточно, чтобы разность этих функций была бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с каждой из них.

При нахождении предела отношения двух бесконечно малых функций каждую из них (или только одну) можно заменить другой бесконечно малой, ей эквивалентной: если $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$, $\beta(x)\sim\beta_1(x)$, то

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta_1(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.\qquad(7.20)$$

Примеры. 1. Доказать, что функции $\alpha(x)=3x^2/(1-x)$ и $\beta(x)=x^2$ при $x\to 0$ являются бесконечно малыми одного порядка.

Найдем предел отношения двух данных функций:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{1-x}:x^2=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{x^2(1-x)}=3\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-x}=3.$$

Поскольку полученный предел отличен от нуля, то данные функции являются бесконечно малыми одного порядка.

2. Доказать, что порядок функции $\alpha(x)=x^4/(2+x^2)$ выше, чем порядок функции $\beta(x)=x^3$ при $x\to 0$.

Так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{2+x^2}:x^3=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^3(2+x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2+x^2}=0,$$

то функция $\alpha(x)=x^4/(2+x^2)$ есть бесконечно малая высшего порядка по сравнению с функцией $\beta(x)=x^3$.

3. Найти $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sin(x-5)}{x^2-6x+5}$.

При $x\to 5$ функции $x-5$, $\sin(x-5)$ являются эквивалентными бесконечно малыми. Поскольку при замене бесконечно малой функции $\sin(x-5)$ на эквивалентную ей функцию $x-5$ предел их отношения не изменится, то

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sin(x-5)}{x^2-6x+5}=\lim_{x\to 5}\frac{\sin(x-5)}{(x-5)(x-1)}=$$
$$=\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{(x-5)(x-1)}=\lim_{x\to 5}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{4}.$$

4. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+x^2-x^4}{2x-x^3}$.

Так как $(\sin x+x^2-x^4)\sim\sin x$, $(2x-x^3)\sim 2x$ при $x\to 0$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+x^2-x^4}{2x-x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{2}.$$

В задачах 7.172—7.181 доказать, что функция $\alpha(x)$ при $x\to a$ является бесконечно малой.

7.172. $\alpha(x)=\sin x$ при $x\to 0$.

7.173. $\alpha(x)=\operatorname{tg}x$ при $x\to 0$.

7.174. $\alpha(x)=\sin(x-2)$ при $x\to 2$.

7.175. $\alpha(x)=\cos x$ при $x\to\pi/2$.

7.176. $\alpha(x)=\ln(1+x)$ при $x\to 0$.

7.177. $\alpha(x)=x^2-3x+2$ при $x\to 1$.

7.178. $\alpha(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ при $x\to\infty$.

7.179. $\alpha(x)=\dfrac{\cos x}{x}$ при $x\to\infty$.

7.180. $\alpha(x)=x\cos(1/x)$ при $x\to 0$.

7.181. $\alpha(x)=x^2\sin(1/x)$ при $x\to 0$.

В задачах 7.182—7.187 данную бесконечно малую при $x\to 0$ сравнить с бесконечно малой $\varphi(x)=x$.

7.182. $\alpha(x)=ax$ $(a=\mathrm{const})$.

7.183. $\alpha(x)=\operatorname{tg}x$.

7.184. $\alpha(x)=\sin^2 x$.

7.185. $\alpha(x)=\sqrt{2x}$.

7.186. $\alpha(x)=\sqrt{4+x}-2$.

7.187. $\alpha(x)=x\sin(1/x)$.

В задачах 7.188—7.197 доказать эквивалентность бесконечно малых при $\alpha(x) \to 0$.

7.188. $\sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$. **7.189.** $\operatorname{tg}\alpha(x) \sim \alpha(x)$.

7.190. $\sin\alpha(x) \sim \operatorname{tg}\alpha(x)$. **7.191.** $\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x)$.

7.192. $\operatorname{arctg}\alpha(x) \sim \alpha(x)$. **7.193.** $\ln[1+\alpha(x)] \sim \alpha(x)$.

7.194. $a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)\ln a \quad (a>0)$.

7.195. $[1+\alpha(x)]^a - 1 \sim a\alpha(x)$.

7.196. $\sqrt[n]{1+\alpha(x)} - 1 \sim \dfrac{\alpha(x)}{n}$. **7.197.** $1-\cos\alpha(x) \sim \dfrac{1}{2}[\alpha(x)]^2$.

В задачах 7.198—7.220 с помощью принципа замены эквивалентных бесконечно малых (см. формулу (7.20)) найти предел.

7.198. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\ln(1+2x)}$. **7.199.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 2x}{x^2}$. **7.200.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\arcsin 4x)^2}{1-\cos 2x}$.

7.201. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x^2-3x+3)}{x^2-7x+6}$. **7.202.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{\ln(x^2-11x+19)}$.

7.203. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+4x}-1}{2x}$. **7.204.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{1+\sin 2x}-1}{\sin 3x}$.

7.205. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-1}{x}$. **7.206.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\operatorname{arctg} 2x)^3}{\sin^3 x}$.

7.207. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sin(x+3)}{2x+6}$. **7.208.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-2)}{x^2-3x+2}$.

7.209. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+5x^6}}{\ln(1+3x)}$. **7.210.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{\sqrt[4]{x^4-7x^8}}$.

7.211. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{x^4+6x^7}}{\ln(1-4x)}$. **7.212.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x + x^3 - 2x^5}{5x+3x^3+x^4}$.

7.213. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x-x^3}{\sin x+2x^2-3x^4}$. **7.214.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 6x-\cos 4x}{\arcsin^2 3x}$.

7.215. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 6x}{e^{3x}-1}$. **7.216.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x-\sin 2x}{\operatorname{arctg} 2x}$.

7.217. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x+\sin 4x}{\arcsin 2x}$. **7.218.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\sqrt[4]{16x^4+x^8}}$.

7.219. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{32x^5+3x^9}}{e^{4x}-1}$. **7.220.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{\ln(1+6x)}$.

8. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ. ТОЧКИ РАЗРЫВА

Важное свойство непрерывности функции применяется при построении различных математических теорий и решении практических задач.

8.1. Непрерывные функции

Функция $y=f(x)$, определенная на интервале (a, b), называется *непрерывной в точке* $x_0 \in (a, b)$, если

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

(т. е. предел функции равен ее значению при предельном значении аргумента).

Функция $y=f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции (критерий непрерывности функции):

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}(f(x_0+\Delta x)-f(x_0)) = 0. \tag{8.1}$$

Функция называется *непрерывной на промежутке*, если она непрерывна в каждой точке этого промежутка.

Сумма и произведение двух функций, непрерывных в некотором промежутке, есть функция, непрерывная в том же промежутке.

Частное двух функций, непрерывных в некотором промежутке, есть функция, непрерывная при всех значениях аргумента из этого промежутка, для которых делитель не равен нулю.

Если $y=f(x)$ — функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$, причем ее значения принадлежат отрезку $[c, d]$, $z=F(y)$ — функция, непрерывная на отрезке $[c, d]$, то сложная функция $z=F(f(x))$ непрерывна в промежутке $[a, b]$ (теорема о непрерывности сложной функции).

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на его концах принимает значения разных знаков ($f(a)f(b)<0$), то в интервале (a, b) уравнение $f(x)=0$ имеет по меньшей мере один действительный корень.

Примеры. 1. Доказать, что функция $y=x^4$ непрерывна при всех x.

Функция $f(x)=x^4$ определена при всех x, т. е. в бесконечном промежутке $(-\infty, +\infty)$. Фиксируем некоторое значение x из этого промежутка. Аргументу x придадим приращение Δx, получим $x+\Delta x$ — приращенное значение аргумента, которому будет соответствовать $f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^4$ — приращенное значение функции. Находим формулу для приращения функции:

$$\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x) = (x+\Delta x)^4 - x^4 =$$
$$= x^4+4x^3\Delta x+6x^2\Delta x^2+4x\Delta x^3+\Delta x^4-x^4 =$$
$$= \Delta x(4x^3+6x^2\Delta x+4x\Delta x^2+\Delta x^3).$$

Переходя к пределу, получаем

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}\Delta x(4x^3+6x^2\Delta x+4x\Delta x^2+\Delta x^3) = 0\cdot 4x^3 = 0.$$

Следовательно, выполнено равенство (8.1), т. е. данная функция непрерывна при всех x.

2. Доказать, что функция $y=\sin x$ непрерывна при всех x.

Поскольку

$$\Delta y = \sin(x+\Delta x)-\sin x = 2\sin(\Delta x/2)\cos(x+\Delta x/2) =$$
$$= \frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2}\cos(x+\Delta x/2)\,\Delta x,$$

то

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2}\cos(x+\Delta x/2)\,\Delta x\right] = 1\cdot\cos x\cdot 0 = 0.$$

Итак, данная функция непрерывна при любом x.

3. Доказать, что функция $y=\sin x^4$ непрерывна при всех x.

Это сложная функция $y=\sin z$, где $z=x^4$. Так как функции y и z непрерывны при всех значениях своих аргументов, то в соответствии с теоремой о непрерывности сложной функции функция $y=\sin x^4$ также непрерывна при всех x.

4. Доказать, что уравнение $x^3-4x+2=0$ имеет по меньшей мере один действительный корень в промежутке $(0, 1)$.

Рассмотрим функцию $f(x)=x^3-4x+2$. Она непрерывна при всех x (как сумма непрерывных функций $f_1(x)=x^3$, $f_2(x)=-4x$, $f_3(x)=2$). Так как $f(0)=2>0$ и $f(1)=1-4+2<0$, то между точками 0 и 1 найдется точка x_0, в которой эта функция обращается в нуль:

$$f(x_0)=0,\quad x_0^3-4x_0+2=0,$$

т. е. x_0 — корень данного уравнения.

В задачах 8.1—8.6 доказать непрерывность функции при любом значении x.

8.1. $y=x^2$. **8.2.** $y=x^5$. **8.3.** $y=x^n$ (n—целое число, $n>0$).
8.4. $y=\cos x$. **8.5.** $y=|x|$. **8.6.** $y=\cos x^3$.

8.7. Доказать, что целая рациональная функция

$$P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$$

непрерывна при любом значении x.

8.8. Доказать, что дробная рациональная функция

$$R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_mx^m}$$

непрерывна при всех значениях x, за исключением тех, при которых знаменатель обращается в нуль.

В задачах 8.9, 8.10 выяснить, при каких значениях x функция непрерывна.

8.9. $y=\operatorname{tg} x$. **8.10.** $y=\operatorname{ctg} x$.

В задачах 8.11—8.20 установить, как надо определить функцию $f(x)$ в указанной точке $x=a$, чтобы функция в этой точке была непрерывна.

8.11. $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$, $x=1$. **8.12.** $f(x)=\dfrac{1-x^4}{1-x^5}$, $x=1$.

8.13. $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$, $x=0$. **8.14.** $f(x)=\dfrac{(1+x)^n-1}{x}$, $x=0$.

8.15. $f(x)=\dfrac{a^x-1}{x}$ $(a>0)$, $x=0$. **8.16.** $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$, $x=0$.

8.17. $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{2x^2}$, $x=0$. **8.18.** $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2x}$, $x=0$.

8.19. $f(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{3x}$, $x=0$. **8.20.** $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-7x+12}$, $x=3$.

В задачах 8.21—8.26 доказать, что уравнение имеет по меньшей мере один действительный корень в указанных промежутках.

8.21. $x^3+4x-6=0$, $(1, 2)$. **8.22.** $9x^3+6x^2-1=0$, $(0, 1)$.
8.23. $x^4-2{,}15x+0{,}95=0$, $(1, 2)$.
8.24. $x^4+1{,}025x-0{,}975=0$, $(-2, -1)$.
8.25. $x^4-6{,}8x^3+21x^2-68x+108=0$, $(2, 3)$, $(4, 5)$.
8.26. $x^4-8{,}8x^3+20x^2-9x+19=0$, $(3, 4)$, $(5, 6)$.

В задачах 8.27—8.29 доказать, что уравнение имеет по меньшей мере один действительный корень.

8.27. $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3=0$.
8.28. $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5=0$.
8.29. $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{2k+1}x^{2k+1}=0$.
8.30. Доказать, что уравнение $\operatorname{ctg} x-x=0$ имеет бесконечное множество действительных корней.

8.2. Точки разрыва функции

Рассмотрим функцию $y=f(x)$, определенную на интервале (a, b), кроме, может быть, точки $x_0\in(a, b)$. Точка x_0 называется *точкой разрыва* данной функции, если в ней функция определена, но не является непрерывной, или не определена в этой точке.

Если x_0 — точка разрыва функции $f(x)$ и существуют конечные пределы $f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$, $f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$, то она называется *точкой разрыва первого рода*. Величина $f(x_0+0)-f(x_0-0)$ называется *скачком функции* $f(x)$ в точке x_0.

Если x_0 — точка разрыва функции $f(x)$ и $f(x_0-0)=f(x_0+0)$, то x_0 называется *точкой устранимого разрыва*.

Если хотя бы один из односторонних пределов $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$ не существует или является бесконечным, то x_0 называется *точкой разрыва второго рода*.

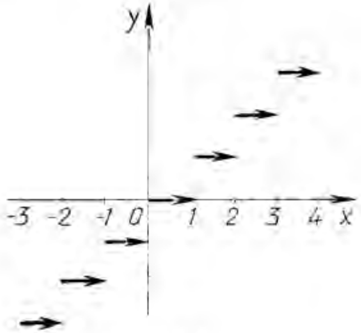


Рис. 8.1

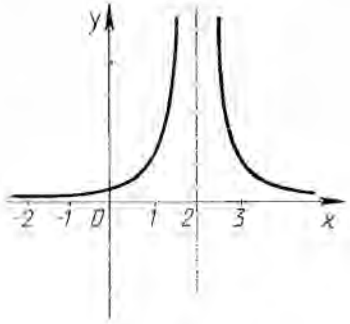


Рис. 8.2

Примеры. 1. Найти точки разрыва функции $y=E(x)$.

Функция $y=E(x)$ определена следующим образом: если $x=n+q$, где n — целое число, а $0\leqslant q<1$, то $E(x)=n$, т. е. функция равна целой части аргумента.

Данная функция разрывна при любом целом значении x. Действительно, пусть $x=n$, тогда $E(x)=n$. При достаточно малых $\Delta x<0$ и $x+\Delta x<n$ $E(x+\Delta x)=n-1$; далее $E(x+\Delta x)=n$ при достаточно малых $\Delta x>0$, поэтому

$$\Delta y=E(x+\Delta x)-E(x)=\begin{cases}-1, & \text{если } \Delta x<0;\\ 0, & \text{если } \Delta x>0.\end{cases}$$

Когда $\Delta x\to 0$, то Δy не стремится к нулю, т. е. функция терпит разрыв при каждом целочисленном значении аргумента.

Каждая из этих точек является точкой разрыва первого рода, так как существуют конечные односторонние пределы. График функции $y=E(x)$ изображен на рис. 8.1.

Замечание. При $x=n$ равенство (8.1) для данной функции не выполняется, так как $\lim\limits_{x\to n-0} E(x)=n-1$, а $E(n)=n$.

2. Найти точки разрыва функции $f(x)=1/(x-2)^2$.

Данная функция не определена в точке $x=2$. Поскольку

$$\lim_{x\to 2-0} f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to 2+0} f(x)=+\infty,$$

т. е. оба односторонних предела бесконечны, то $x=2$ является точкой разрыва второго рода этой функции (рис. 8.2).

В задачах 8.31—8.42 найти точки разрыва функции, указать их вид, построить график функции.

8.31. $f(x)=\dfrac{x-1}{x+3}$. **8.32.** $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x}$. **8.33.** $f(x)=\dfrac{9}{9-x^2}$.

8.34. $f(x)=\dfrac{3x+7}{x^2-3x+2}$. **8.35.** $f(x)=\ln\left|\dfrac{x-3}{x+3}\right|$. **8.36.** $f(x)=3^{1/(x+1)}$.

8.37. $f(x)=2x-\dfrac{|x+3|}{x+3}$. **8.38.** $f(x)=e^{-1/x^2}$. **8.39.** $f(x)=\ln|\sin x|$.

8.40. $f(x)=\operatorname{cosec} x$. **8.41.** $f(x)=\sin\dfrac{2}{x}$. **8.42.** $f(x)=\cos\dfrac{\pi}{x}$.

В задачах 8.43—8.51 найти точки разрыва функции и определить скачки функции в этих точках.

8.43. $f(x)=\dfrac{|x+2|}{x+2}$. **8.44.** $f(x)=x+\dfrac{x-1}{|x-1|}$.

8.45. $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2-x}$. **8.46.** $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$.

8.47. $f(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 2,\\ x+1, & x>2.\end{cases}$ **8.48.** $f(x)=\begin{cases}-2x+3, & x<1,\\ 3x+2, & x\geqslant 1.\end{cases}$

8.49. $f(x)=\dfrac{1}{1+3^{1/x}}$. **8.50.** $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{1/(1-x)}}$.

8.51. $f(x)=2^{1/x}$.

8.3. Гиперболические функции

Гиперболические синус, косинус, тангенс и котангенс определяются соответственно формулами:

$$\operatorname{sh} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}, \tag{8.2}$$

$$\operatorname{ch} x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}, \tag{8.3}$$

$$\operatorname{th} x=\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}},\quad \operatorname{cth} x=\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}.$$

Основные формулы для гиперболических функций:

$$\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=1,\quad \operatorname{ch}^2 x+\operatorname{sh}^2 x=\operatorname{ch} 2x,\quad \operatorname{sh} 2x=2\operatorname{sh} x\operatorname{ch} x.$$

Примеры. 1. Построить график функции $y=\operatorname{ch} x$.

Принимая во внимание формулу (8.3), построим сначала графики функций $y=\dfrac{1}{2}e^x$ и $y=\dfrac{1}{2}e^{-x}$ (рис. 8.3). Путем сложения этих графиков получаем график функции $y=\operatorname{ch} x$.

2. Доказать, что $\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=1$.

Используя формулы (8.2) и (8.3), находим

$$\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2=\frac{e^{2x}+2e^0+e^{-2x}}{4}-\frac{e^{2x}-2e^0+e^{-2x}}{4}=$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1,$$

что и требовалось доказать.

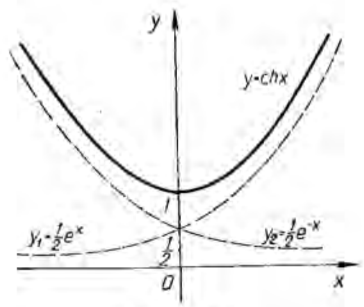


Рис. 8.3

8.52. Доказать, что функция $y=\operatorname{sh} x$ является нечетной.

8.53. Доказать, что функция $y=\operatorname{ch} x$ является четной.

В задачах 8.54—8.63 доказать, что верно равенство.

8.54. $\operatorname{th} x\operatorname{cth} x=1$. **8.55.** $\operatorname{ch}^2 x+\operatorname{sh}^2 x=\operatorname{ch} 2x$.

8.56. $\operatorname{sh}(x+y)=\operatorname{sh} x\operatorname{ch} y+\operatorname{ch} x\operatorname{sh} y$.

8.57. $\operatorname{ch}(x+y)=\operatorname{ch} x\operatorname{ch} y+\operatorname{sh} x\operatorname{sh} y$.

8.58. $\operatorname{th}(x+y)=\dfrac{\operatorname{th} x+\operatorname{th} y}{1+\operatorname{th} x\operatorname{th} y}$. **8.59.** $\operatorname{sh} 2x=2\operatorname{sh} x\operatorname{ch} x$.

8.60. $\operatorname{Arsh} x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

8.61. $\operatorname{Arch} x=\ln\left(x\pm\sqrt{x^2-1}\right)=\pm\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\quad (x\geqslant 1)$.

8.62. $\operatorname{Arth} x=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}\quad (|x|<1)$.

8.63. $\operatorname{Arcth} x=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x+1}{x-1}\quad (|x|>1)$.

В задачах 8.64—8.75 построить график функции.

8.64. $y=\operatorname{sh} x$. **8.65.** $y=\operatorname{th} x$. **8.66.** $y=\operatorname{cth} x$.

8.67. $y=\operatorname{sh} 2x$. **8.68.** $y=\operatorname{ch} 2x$. **8.69.** $y=\operatorname{sh}^2 x$.

8.70. $y=\operatorname{sh}(x/3)$. **8.71.** $y=\operatorname{ch}(x/3)$. **8.72.** $y=\operatorname{Arsh} x$.

8.73. $y=\operatorname{Arch} x$. **8.74.** $y=\operatorname{Arth} x$. **8.75.** $y=\operatorname{Arcth} x$.

IV. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

9. ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ

Быстрота протекания физических, химических и других процессов выражается с помощью производной.

Производной функции $y = f(x)$ *в точке* x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

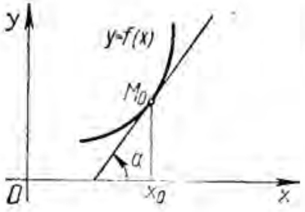


Рис. 9.1

Функция, имеющая конечную производную, называется *дифференцируемой*. Операция нахождения производной называется *дифференцированием*.

Геометрический смысл производной. *Производная функции* $y = f(x)$ при $x = x_0$ *равна угловому коэффициенту касательной к графику данной функции в точке* $M_0(x_0, f(x_0))$, *т. е.*

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha,$$

где α *— угол наклона касательной к оси* Ox *прямоугольной декартовой системы координат* (рис. 9.1).

Механический смысл производной. *Для функции* $s = f(t)$, *меняющейся со временем* t, *производная* s'_t *при* $t = t_0$ *есть скорость изменения функции в данный момент времени* t_0, *т. е.*

$$f'(t_0) = v(t_0),$$

где $v(t_0)$ *— скорость в момент времени* t_0.

9.1. Производные степенных, тригонометрических и гиперболических функций

Если u, v, w — дифференцируемые функции аргумента x, c — постоянная величина, то основные правила дифференцирования выражаются формулами:

$$c' = 0 \quad (c = \text{const}), \tag{9.1}$$

$$(u - v + w)' = u' - v' + w', \tag{9.2}$$

$$(uv)' = u'v + uv', \tag{9.3}$$

$$(cu)' = cu', \quad \left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{u'}{c} \quad (c = \text{const}), \tag{9.4}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0). \tag{9.5}$$

Основные формулы для производных степенных, тригонометрических и гиперболических функций:

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}, \quad x'_x = 1, \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}; \tag{9.6}$$

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x, \quad (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, \quad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x,$$

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \quad (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}. \tag{9.7}$$

Примеры. 1. Найти производную функции $y = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x$.

Применяя формулы (9.2), (9.4), (9.6), получаем

$$y' = \left(\frac{1}{4}x^4\right)' - (x^3)' + \left(\frac{3}{2}x^2\right)' - (x)' = \frac{1}{4}\cdot 4x^3 - 3x^2 + \frac{3}{2}\cdot 2x - 1 =$$

$$= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)^3.$$

2. Найти производную функции $y = (x-3)\sqrt[3]{x^2}$.

На основании формул (9.1), (9.3), (9.6) находим

$$y' = (x-3)'\sqrt[3]{x^2} + (x-3)(\sqrt[3]{x^2})' = (x-3)'\sqrt[3]{x^2} + (x-3)(x^{2/3})' =$$

$$= 1\cdot\sqrt[3]{x^2} + (x-3)\frac{2}{3}x^{-1/3} = \sqrt[3]{x^2} + \frac{2(x-3)}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{5x-6}{3\sqrt[3]{x}}.$$

3. Найти производную функции $y = \frac{x^2 + 2x + 1}{3x^2 + 4x + 3}$.

Применяя формулы (9.5), (9.6), находим

$$y' = \frac{(x^2 + 2x + 1)'(3x^2 + 4x + 3) - (3x^2 + 4x + 3)'(x^2 + 2x + 1)}{(3x^2 + 4x + 3)^2} =$$

$$= \frac{(2x+2)(3x^2 + 4x + 3) - (6x+4)(x^2 + 2x + 1)}{(3x^2 + 4x + 3)^2} =$$

$$= \frac{6x^3 + 8x^2 + 6x + 6x^2 + 8x + 6 - (6x^3 + 12x^2 + 6x + 4x^2 + 8x + 4)}{(3x^2 + 4x + 3)^2} =$$

$$= \frac{-2x^2 + 2}{(3x^2 + 4x + 3)^2} = \frac{2(1 - x^2)}{(3x^2 + 4x + 3)^2}.$$

4. Дана функция $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 2$. Найти $f'(-1)$, $f'(0)$, $f'(1)$.

Находим производную данной функции:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 5. \tag{1}$$

Подставляя значения аргумента $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ в формулу (1), получаем:

$$f'(-1) = 3(-1)^2 - 6(-1) + 5 = 14, \quad f'(0) = 5, \quad f'(1) = 2.$$

5. Найти производную функции $y = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x}$.

Применяя формулы (9.5), (9.7), находим

$$y' = \frac{(\operatorname{ch} x)'(\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x) - (\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x)'\operatorname{ch} x}{(\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x)^2} =$$

$$= \frac{\operatorname{sh} x(\operatorname{sh} x+\operatorname{ch} x)-(\operatorname{ch} x+\operatorname{sh} x)\operatorname{ch} x}{(\operatorname{sh} x+\operatorname{ch} x)^2} = \frac{\operatorname{sh}^2 x+\operatorname{sh} x\operatorname{ch} x-\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh} x\operatorname{ch} x}{(\operatorname{sh} x+\operatorname{ch} x)^2} =$$

$$= \frac{\operatorname{sh}^2 x-\operatorname{ch}^2 x}{(\operatorname{sh} x+\operatorname{ch} x)^2} = \frac{-1}{(\operatorname{sh} x+\operatorname{ch} x)^2}.$$

В задачах 9.1—9.36 найти производную функции.

9.1. $y=x^5-4x^4+2x^3-3x^2+7x-9$.

9.2. $y=\frac{1}{6}x^6-\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{2}x^2$.

9.3. $y=\frac{4}{x}-\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{3x^3}$.

9.4. $y=\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{4x^4}+\frac{1}{6x^6}$.

9.5. $y=\sqrt[3]{9x^2}-\sqrt[4]{7x^3}$.

9.6. $y=4\sqrt{x}+6\sqrt[3]{x^2}-8\sqrt[4]{x^3}$.

9.7. $y=\frac{5}{4\sqrt[5]{x^4}}-\frac{2}{3\sqrt{x^3}}$.

9.8. $y=\frac{3}{4x\sqrt[3]{x}}-\frac{3}{2\sqrt[3]{x^2}}$.

9.9. $y=\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x$.

9.10. $y=\operatorname{tg} x-x$.

9.11. $y=x\cos x-x^2\sin x$.

9.12. $y=x\sin x+x^2\cos x$.

9.13. $y=2x\sin x+(2-x^2)\cos x$.

9.14. $y=2x\operatorname{ch} x-(x^2+2)\operatorname{sh} x$.

9.15. $y=\frac{3x-2}{4x+5}$.

9.16. $y=\frac{ax+b}{cx+d}$.

9.17. $y=\frac{x^2-1}{x^2+4}$.

9.18. $y=\frac{x^2+2x+1}{3x^2+4x+3}$.

9.19. $y=\frac{2x^2+3x+4}{x^2+x+1}$.

9.20. $y=\frac{5x^2+4x+3}{x^2+2x+1}$.

9.21. $y=\frac{x^2+4x+5}{x^2+6x+7}$.

9.22. $y=\frac{Ax^2+Bx+C}{ax^2+bx+c}$.

9.23. $y=(x^3-1)/(x^2+1)$.

9.24. $y=(x^4-1)/(x^3+1)$.

9.25. $y=x\operatorname{sh} x-x^2\operatorname{ch} x$.

9.26. $y=x\operatorname{ch} x+x^2\operatorname{sh} x$.

9.27. $y=\frac{\operatorname{ch} x}{x+\operatorname{sh} x}$.

9.28. $y=\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x+\operatorname{sh} x}$.

9.29. $y=\frac{x+\operatorname{sh} x}{x+\operatorname{ch} x}$.

9.30. $y=\frac{\operatorname{ch} x-x}{\operatorname{sh} x+x}$.

9.31. $y=\frac{\cos x-x\sin x}{\sin x+x\cos x}$.

9.32. $y=\frac{\operatorname{sh} x-x\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} x-x\operatorname{sh} x}$.

9.33. $f(x)=x^3-5x^2+3x-1$. Вычислить $f'(-1)$, $f'(0)$, $f'(1)$.

9.34. $r(\varphi)=\varphi+\operatorname{ctg}\varphi$. Вычислить $r'(-\pi/4)$, $r'(\pi/4)$, $r'(\pi/2)$.

9.35. $s(t)=t^4-4t^2+5t-2$. Вычислить $s'(0)$, $s'(1)$, $s'(-2)$.

9.36. $x(t)=\sin t-\cos t$. Вычислить $x'(-\pi/4)$, $x'(0)$, $x'(\pi/2)$.

9.2. Производная функции от функции

Если $y=f(u)$ и $u=\varphi(x)$ — дифференцируемые функции своих аргументов, то производная функции от функции (или сложной функции) $y=f(\varphi(x))$ существует и равна произведению производной данной функции y по промежуточному аргументу и производной промежуточного аргумента u по независимой переменной x:

$$y'_x=y'_u u'_x. \tag{9.8}$$

Примеры. 1. Найти производную функции $y=\cos 4x$.

Аргументом данной функции является не x, а $4x$. Это сложная тригонометрическая функция, которую можно представить так:

$$y=\cos z,\ z=4x.$$

Поскольку

$$y'_z=-\sin z=-\sin 4x,\quad z'_x=4,$$

то по формуле (9.8) получаем

$$(\cos 4x)'=-4\sin 4x.$$

2. Найти производную функции $y=\sin^3 x$.

Это сложная степенная функция с промежуточным аргументом z: $y=z^3$, $z=\sin x$.

Так как

$$y'_z=3z^2=3\sin^2 x,\quad z'_x=\cos x,$$

то

$$(\sin^3 x)'=3\sin^2 x\cos x.$$

3. Найти производную функции $y=\sin^3(x/3)$.

Это сложная степенная функция, аргумент которой является сложной тригонометрической функцией. Первый промежуточный аргумент $u=\sin z$, второй $z=x/3$.

Применяя дважды формулу (9.8), получаем

$$\left(\sin^3\frac{x}{3}\right)'=\left(\sin^3\frac{x}{3}\right)'_u u'_x=\left(\sin^3\frac{x}{3}\right)'_u\left(\sin\frac{x}{3}\right)'_z z'=$$

$$=3\sin^2\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}\cdot\frac{1}{3}=\sin^2\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}.$$

В задачах 9.37—9.60 найти производную функции.

9.37. $y=\sin 7x$.

9.38. $y=\cos(3-5x)$.

9.39. $y=8\sin\frac{x}{4}$.

9.40. $y=\frac{1}{3}\cos(6x-1)$.

9.41. $y=\sin^2 2x$.

9.42. $y=\sin x^3$.

9.43. $y=(2-3x)^5$.

9.44. $y=\frac{1}{(3+2x^2)^3}$.

9.45. $y=\sqrt[4]{(5-8x)^3}$.

9.46. $y=1/\sqrt[5]{(2-5x)^2}$.

9.47. $y=\operatorname{sh}^2 x$.

9.48. $y=\operatorname{ch}^3 x$.

9.49. $y=\operatorname{sh}^4 x-\operatorname{ch}^4 x$.

9.50. $y=\operatorname{ch}^4 x+\operatorname{sh}^4 x$.

9.51. $y=3\operatorname{th} x-\operatorname{th}^3 x$.

9.52. $y=-\frac{1}{5}\operatorname{cth}^5 x-\frac{2}{3}\operatorname{cth}^3 x-\operatorname{cth} x$.

9.53. $y=\sqrt{x^2+4x+2}$.

9.54. $y=\sqrt[3]{x^3+3x+5}$.

9.55. $y=\sqrt{x^2+\cos 4x}$.

9.56. $y=1/\sqrt[3]{(x+\sin 2x)^2}$.

9.57. $y=\sin\sqrt{x^2+4x-5}$.

9.58. $y=\cos(1/x)$.

9.59. $y=\cos^3 x^2$.

9.60. $y=\sin^2(x^2-2x+3)$.

9.3. Производные показательных и логарифмических функций

Основные формулы:

$$(a^x)' = a^x \ln a, \quad (e^x)' = e^x;$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a},$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad (\ln |x|)' = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0).$$

Если $u = u(x)$ — дифференцируемая функция, то:

$$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u', \quad (\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a};$$

$$(e^u)' = e^u u'; \tag{9.9}$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}. \tag{9.10}$$

Примеры. 1. Найти производную функции $y = e^{\cos 2x}$.
По формуле (9.9) получаем

$$(e^{\cos 2x})' = e^{\cos 2x} (\cos 2x)' = e^{\cos 2x} (-\sin 2x)(2x)' = -2e^{\cos 2x} \sin 2x.$$

2. Найти производную функции $y = \ln \sqrt{x^2+4x+5}$.
По формуле (9.10) получаем

$$(\ln \sqrt{x^2+4x+5})' = \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+5}} (\sqrt{x^2+4x+5})' = \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+5}} \times$$

$$\times \frac{1}{2\sqrt{x^2+4x+5}} (x^2+4x+5)' = \frac{2x+4}{2(x^2+4x+5)} = \frac{x+2}{x^2+4x+5}.$$

Замечание. Данную функцию можно записать в виде $y = \frac{1}{2} \ln (x^2+4x+5)$ и продифференцировать следующим образом:

$$y' = \frac{1}{2} \frac{(x^2+4x+5)'}{x^2+4x+5} = \frac{1}{2} \frac{2x+4}{x^2+4x+5} = \frac{x+2}{x^2+4x+5}.$$

3. Найти производную функции $y = \ln (x+8+\sqrt{x^2+16x+5})$.
По формуле (9.10) получаем

$$y' = \frac{(x+8+\sqrt{x^2+16x+5})'}{x+8+\sqrt{x^2+16x+5}} = \frac{1}{x+8+\sqrt{x^2+16x+5}} \times$$

$$\times \left[1 + \frac{(x^2+16x+5)'}{2\sqrt{x^2+16x+5}}\right] = \frac{1}{x+8+\sqrt{x^2+16x+5}} \left(1 + \frac{2x+16}{2\sqrt{x^2+16x+5}}\right) =$$

$$= \frac{1}{x+8+\sqrt{x^2+16x+5}} \left(\frac{\sqrt{x^2+16x+5}+x+8}{\sqrt{x^2+16x+5}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+16x+5}}.$$

В задачах 9.61—9.90 найти производную функции.

9.61. $y = a^{2x}$. **9.62.** $y = \lg 3x$. **9.63.** $y = x^5 + 5^x$.

9.64. $y = e^{x^2}$. **9.65.** $y = \lg (x^2 + bx + c)$. **9.66.** $y = a^{\sin 5x}$.

9.67. $y = \ln(x^2+6x+7)$. **9.68.** $y = \ln \sin x$.

9.69. $y = \ln \cos 4x$. **9.70.** $y = e^{\sin(x/3)}$. **9.71.** $y = e^{\cos 3x}$.

9.72. $y = e^{\sqrt{x^2+a^2}}$. **9.73.** $y = \ln \frac{x+1}{x-1}$.

9.74. $y = \ln \frac{x^2+4x+5}{x^2+6x+7}$. **9.75.** $y = \frac{1}{18} \ln \frac{x-9}{x+9}$.

9.76. $y = \frac{\sqrt{10}}{60} \ln \frac{\sqrt{5}x - 3\sqrt{2}}{\sqrt{5}x + 3\sqrt{2}}$. **9.77.** $y = \frac{\sqrt{3}}{12} \ln \frac{x+2-2\sqrt{3}}{x+2+2\sqrt{3}}$.

9.78. $y = \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln \frac{x+1-\sqrt{5}}{x+1+\sqrt{5}}$. **9.79.** $y = \frac{\sqrt{7}}{28} \ln \frac{2(x+1)-\sqrt{7}}{2(x+1)+\sqrt{7}}$.

9.80. $y = \frac{\sqrt{78}}{156} \ln \frac{\sqrt{3}(x-2)-\sqrt{26}}{\sqrt{3}(x-2)+\sqrt{26}}$. **9.81.** $y = \frac{1}{3} \ln \frac{x-2}{x+1}$.

9.82. $y = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left(x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x + \frac{5}{2}}\right)$.

9.83. $y = \ln (x - 2 + \sqrt{x^2 - 4x - 5})$.

9.84. $y = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + \frac{4}{3}}\right)$.

9.85. $y = \frac{1}{4} \ln \left(x^2 - 4x + \frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{14}}{28} \ln \frac{x-2-\sqrt{3,5}}{x-2+\sqrt{3,5}}$.

9.86. $y = -\frac{\sqrt{3}}{3} \ln \left(\frac{-x}{4+2x} + \sqrt{\frac{x^2+x+1}{3(x+2)^2}}\right)$.

9.87. $y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \ln \left(\frac{x+3}{4x-4} + \sqrt{\frac{x^2-x+2}{2(x-1)^2}}\right)$.

9.88. $y = -\frac{1}{\sqrt{21}} \ln \left(\frac{6+5x}{21x-63} + \sqrt{\frac{x^2+4x}{21(x-3)^2}}\right)$.

9.89. $y = \frac{1}{3} \ln \frac{|(x-2)(x+1)^3|(x+2)^2}{(x-1)^2}$.

9.90. $y = \sqrt[5]{\frac{(x-3)^7 (x-2)^2 (x+2)^8}{(x+3)^{12}}}$.

9.4. Производные обратных тригонометрических функций

Основные формулы:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Если $u = u(x)$ — дифференцируемая функция от x, то:

$$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}, \tag{9.11}$$

$$(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}, \tag{9.12}$$

8. Зак. 2026

$$(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}, \qquad (9.13)$$

$$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}.$$

Примеры. 1. Найти производную функции $y = \arcsin\frac{x-1}{2}$.

По формуле (9.11) получаем

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2}}\left(\frac{x-1}{2}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2-2x+1}{4}}}\cdot\frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}.$$

2. Найти производную функции $y = \frac{\sqrt{2}}{2}\arccos\frac{\sqrt{2}(x-1)}{3}$.

По формуле (9.12) получаем

$$y' = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2(x-1)^2}{9}}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}\right] = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2x^2-4x+2}{9}}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{7+4x-2x^2}}.$$

3. Найти производную функции $y = \frac{1}{2\sqrt{13}}\operatorname{arcctg}\frac{2x}{\sqrt{13}}$.

По формуле (9.13) получаем

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{13}}\left(-\frac{1}{1+\frac{4x^2}{13}}\right)\frac{2}{\sqrt{13}} = -\frac{1}{4x^2+13}.$$

4. Найти производную функции $y = \sqrt[3]{[\operatorname{arctg}(\ln\sin 3x)]^2}$.

В данном примере формулу (9.8) необходимо применить несколько раз. Функцию можно представить так: $y = w^{2/3}$, $w = \operatorname{arctg} u$, $u = \ln v$, $v = \sin z$, $z = 3x$.

Дифференцируя, получаем

$$y' = \frac{2}{3}[\operatorname{arctg}(\ln\sin 3x)]^{-1/3}[\operatorname{arctg}(\ln\sin 3x)]' =$$

$$= \frac{2}{3\sqrt[3]{\operatorname{arctg}(\ln\sin 3x)}}\cdot\frac{1}{1+\ln^2\sin 3x}(\ln\sin 3x)' =$$

$$= \frac{2}{3\sqrt[3]{\operatorname{arctg}(\ln\sin 3x)}}\cdot\frac{1}{1+\ln^2\sin 3x}\cdot\frac{1}{\sin 3x}(\sin 3x)' =$$

$$= \frac{2}{3\sqrt[3]{\operatorname{arctg}(\ln\sin 3x)}}\cdot\frac{1}{1+\ln^2\sin 3x}\cdot\frac{1}{\sin 3x}\cos 3x\,(3x)' =$$

$$= \frac{2\cos 3x}{\sqrt[3]{\operatorname{arctg}(\ln\sin 3x)}\,(1+\ln^2\sin 3x)\sin 3x} = \frac{2\operatorname{ctg} 3x}{\sqrt[3]{\operatorname{arctg}(\ln\sin 3x)}\,(1+\ln^2\sin 3x)}.$$

В задачах 9.91—9.110 найти производную функции.

9.91. $y = \arcsin(x/8)$. **9.92.** $y = \arccos 3x$.

9.93. $y = \operatorname{arctg}(x/2)$. **9.94.** $y = \operatorname{arcctg} 5x$.

9.95. $y = \arcsin\frac{x-2}{4}$. **9.96.** $y = \arccos\frac{x-2}{2}$.

9.97. $y = \frac{1}{2}\arcsin\frac{8x-9}{9}$. **9.98.** $y = \frac{\sqrt{3}}{3}\arccos\frac{\sqrt{39}(x+1)}{13}$.

9.99. $y = \frac{1}{8}\operatorname{arctg}\frac{x}{8}$. **9.100.** $y = \frac{1}{4}\operatorname{arcctg}\frac{x-5}{4}$.

9.101. $y = \frac{1}{\sqrt{14}}\operatorname{arctg}\frac{x+6}{\sqrt{14}}$. **9.102.** $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arcctg}\sqrt{2}(x-1)$.

9.103. $y = \frac{\sqrt{6}}{6}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3}{2}}(x+1)$. **9.104.** $y = \frac{2\sqrt{11}}{11}\operatorname{arcctg}\frac{2x+1}{\sqrt{11}}$.

9.105. $y = \ln\sqrt{x^2+2x+5} + \operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}$.

9.106. $y = \frac{1}{5}\ln(5x^2-x+2) - \frac{8}{5\sqrt{39}}\operatorname{arctg}\frac{10x-1}{\sqrt{39}}$.

9.107. $y = \sqrt[3]{[\operatorname{arctg}(\ln\sin 9x)]^2}$. **9.108.** $y = \sqrt[4]{[\operatorname{arcctg}(\ln\cos 4x)]^3}$.

9.109. $y = \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x+1) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x-1) + \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}$.

9.110. $y = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} x + \frac{\sqrt{3}}{12}\ln\frac{x^2+\sqrt{3}x+1}{x^2-\sqrt{3}x+1} + \frac{1}{6}\operatorname{arctg}(2x+\sqrt{3}) + \frac{1}{6}\operatorname{arctg}(2x-\sqrt{3})$.

9.5. Производные неявных функций и функций, заданных параметрически. Производная функции $y = u^v$

Если дифференцируемая функция $y = y(x)$ задана уравнением $F(x, y) = 0$, то производная $y' = y'(x)$ этой неявной функции может быть найдена из уравнения $F'_x = 0$, где $F = F(x, y)$ рассматривается как сложная функция от переменной x.

Если функция $y = y'(x)$ задана параметрически:

$$x = x(t),\quad y = y(t)\quad (\alpha < t < \beta),$$

где $x(t)$, $y(t)$ — дифференцируемые функции и $x'(t) \neq 0$, то ее производная y'_x определяется формулой

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \qquad (9.14)$$

Производная степенно-показательной функции u^v, где u, v — дифференцируемые функции от x, находится с помощью предварительного логарифмирования.

Примеры. 1. Найти производную y'_x функции, заданной уравнением $x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$.

Данное уравнение определяет y как некоторую функцию от x. Подставляя выражение для y в это уравнение, получаем тождество относительно x. Дифференцируя это тождество по x, находим:

$$2x + x'y + xy' + 2yy' = 0,\quad 2x + y + xy' + 2yy' = 0,$$

$$2x + y + y'(x + 2y) = 0.$$

Разрешая последнее уравнение относительно y', получаем

$$y' = -\frac{2x + y}{x + 2y}.$$

2. Найти производную функции, заданной параметрически: $x = 4t$, $y = t^2$.
Поскольку $x'_t = 4$, $y'_t = 2t$, по формуле (9.14) находим

$$y'_x = \frac{2t}{4} = \frac{1}{2}t.$$

3. Найти угловой коэффициент касательной к линии $x^2 + 3xy + y^2 + 11 = 0$ в точке $M(4, -3)$.

Находим производную неявной функции, заданной уравнением $x^2 + 3xy + y^2 + 11 = 0$:

$$2x + 3y + 3xy' + 2yy' = 0,$$

$$2x + 3y + y'(3x + 2y) = 0,\quad y'_k = -\frac{2x + 3y}{3x + 2y}.$$

Вычислим значение y'_x при $x = 4$ и $y = -3$:

$$y' = -\frac{2\cdot 4 + 3(-3)}{3\cdot 4 + 2(-3)} = -\frac{8 - 9}{12 - 6} = \frac{1}{6}.$$

Принимая во внимание геометрический смысл производной и определение углового коэффициента прямой, заключаем, что $k = 1/6$.

4. Найти производную функции $y = x^x$.

Это функция вида $y = u^v$, где $u = x$, $v = x$ — дифференцируемые функции аргумента x. Логарифмируем данное равенство по основанию e: $\ln y = x \ln x$. Дифференцируя, находим:

$$\frac{1}{y}y' = 1\cdot \ln x + x\frac{1}{x},\quad \frac{y'}{y} = \ln x + 1,$$

откуда $y' = y(\ln x + 1)$. Подставляя в последнее равенство выражение для y, получаем $y' = x^x(\ln x + 1)$.

5. Найти производную функции $y = x^{\sin x}$.

Логарифмируя данное равенство по основанию e, получаем $\ln y = \sin x \cdot \ln x$. Дифференцируя последнюю формулу, находим $y'/y = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot (1/x)$, откуда $y' = y(\cos x \cdot \ln x + (\sin x)/x)$, $y' = x^{\sin x}(\cos x \cdot \ln x + (\sin x)/x)$.

В задачах 9.111—9.120 найти производную неявной функции.

9.111. $x^2 + 5xy + y^2 - 7 = 0$.

9.112. $x^3 + 3x^2y + 3xy + y^3 - 8 = 0$. **9.113.** $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

9.114. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$. **9.115.** $3x^2 + 4xy - 4x - 8y = 0$.

9.116. $x^2 + 4xy + 4y^2 + 6x - 3y + 15 = 0$.

9.117. $4x^2 - 4xy + y^2 - 4x - 8y + 20 = 0$.

9.118. $x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 8y + 16 = 0$.

9.119. $y^2 + xy + \sin y = 0$. **9.120.** $e^y - e^{-y} - 2xy = 0$.

В задачах 9.121—9.124 вычислить значение производной неявной функции в указанной точке.

9.121. $x^2 - 2xy + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0$, $M(5, 0)$.

9.122. $11x^2 - 16xy - y^2 - 26x + 22y + 31 = 0$, $M(1, -2)$.

9.123. $17x^2 + 12xy + 8y^2 + 22x - 4y - 55 = 0$, $M(1, 1)$.

9.124. $9x^2 + 4xy + 6y^2 - 8x + 16y - 50 = 0$, $M(2, 1)$.

В задачах 9.125—9.132 найти производную функции, заданной параметрически.

9.125. $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$. **9.126.** $x = a\sin t$, $y = a\cos t$.

9.127. $x = a\cos t$, $y = b\sin t$. **9.128.** $x = a\,\mathrm{sh}\,t$, $y = b\,\mathrm{ch}\,t$.

9.129. $x = \cos^2 t$, $y = \sin^2 t$. **9.130.** $x = a\sin^3 t$, $y = a\cos^3 t$.

9.131. $x = \frac{3at}{1 + t^3}$, $y = \frac{3at^2}{1 + t^3}$. **9.132.** $x = t(1 - \sin t)$, $y = t\cos t$.

В задачах 9.133—9.145 найти производную степенно-показательной функции.

9.133. $y = x^{\sqrt{x}}$. **9.134.** $y = \sqrt[x]{x}$. **9.135.** $y = (\sin x)^{\cos x}$.

9.136. $y = (\mathrm{arcctg}\,x)^x$. **9.137.** $y = x^{\mathrm{arctg}\,x}$. **9.138.** $y = (\cos x)^{\sin x}$.

9.139. $y = x^{\cos x}$. **9.140.** $y = (\cos x)^x$. **9.141.** $y = (\sin x)^x$.

9.142. $y = (\mathrm{tg}\,x)^x$. **9.143.** $y = x^{\mathrm{ctg}\,x}$. **9.144.** $y = x^{1/(1-x)}$.

9.145. $y = u^v$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$ — дифференцируемые функции.

9.6. Производные высших порядков

Производной второго порядка или *второй производной* функции $y = f(x)$ называется производная от ее производной $y' = f'(x)$ (которую в дальнейшем будем называть *первой производной*).

Обозначения второй производной:

$$y'' = (y')',\ f''(x) = (f'(x))',\ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx}.$$

Механический смысл второй производной. *Если $x = f(t)$ — закон прямолинейного движения точки, то $x'' = f''(t)$ — ускорение этого движения в момент времени t.*

Аналогично определяются и обозначаются производные третьего, четвертого и более высоких порядков:

$$y''' = (y'')' = (f''(x))',\ y^{\mathrm{IV}} = (y''')',\ \ldots,\ y^{(n)} = (y^{(n-1)})'.$$

Примеры. 1. Найти вторую производную функции $y = \sin^2 x$.

Находим сначала первую производную данной функции:

$$y' = 2\sin x\cos x = \sin 2x.$$

Дифференцируя ее еще раз, получаем

$$y'' = (\sin 2x)' = \cos 2x(2x)' = 2\cos 2x.$$

2. Дана функция $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 5x + 7$. Вычислить $f'''(-1)$, $f'''(0)$, $f'''(1)$.

Находим общие выражения для производных первого, второго и третьего порядка:

$$f'(x)=4x^3-9x^2+4x-5,\quad f''(x)=12x^2-18x+4,\quad f'''(x)=24x-18.$$

Подставляя в последнее выражение значения $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=1$, получаем

$$f'''(-1)=-42,\quad f'''(0)=-18,\quad f'''(1)=6.$$

3. Найти вторую производную функции, заданной параметрически: $x=\varphi_1(t)$, $y=\varphi_2(t)$.

По определению второй производной, $y''_{xx}=(y'_x)'_x$, где $y'_x=y'_t/x'_t$ (см. формулу (9.14)). Следовательно,

$$y''_{xx}=(y'_x)'_x=\frac{dy'}{dx}=\frac{dy'}{dt}\,\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dt}\,(y'_t/x'_t)\,\frac{dt}{dx}=(y'_t/x'_t)'_t\,t'_x.$$

Так как

$$(y'_t/x'_t)'_t=\frac{x'_t(y'_t)'_t-y'_t(x'_t)'_t}{x'^2_t}=\frac{x'_t y''_{tt}-y'_t x''_{tt}}{x'^2_t}$$

и $t'_x=1/x'_t$, то

$$y''_{xx}=\frac{x'_t y''_{tt}-y'_t x''_{tt}}{x'^3_t}$$

или

$$y''_{xx}=\frac{\varphi'_1(t)\,\varphi''_2(t)-\varphi'_2(t)\,\varphi''_1(t)}{(\varphi'_1(t))^3}.\qquad (1)$$

4. Найти вторую производную функции, заданной уравнениями: $x=t^2$, $y=t^3$.

Поскольку $x'_t=2t$, $y'_t=3t^2$, $x''=2$, $y''=6t$, то по формуле (1) из предыдущего примера имеем

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2t\,6t-3t^2\,2}{(2t)^3}=\frac{12t^2-6t^2}{8t^3}=\frac{6t^2}{8t^3}=\frac{3}{4t}.$$

В задачах 9.146—9.161 найти вторую производную функции.

9.146. $y=4x^2-2x+3$.

9.147. $y=x^3+6x^2-5x+8$.

9.148. $y=\cos^2 x$.

9.149. $y=\mathrm{ctg}\,x$.

9.150. $y=(x+1)/(x^2+1)$.

9.151. $y=(x^2+1)/(x^2-1)$.

9.152. $y=x^2/(x+1)$.

9.153. $y=(x^2+x)/(x-1)$.

9.154. $y=\dfrac{x-1}{x+1}$.

9.155. $y=\dfrac{x^2+5x-4}{x^2-6x+5}$.

9.156. $y=x+\sqrt{4-x}$.

9.157. $y=1/\sqrt{x+2}$.

9.158. $y=\ln\left|\dfrac{x+3}{x-3}\right|$.

9.159. $y=\ln\left|\dfrac{x-4}{x+4}\right|$.

9.160. $y=\dfrac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$.

9.161. $y=\dfrac{x^3-x}{(1+x^2)^4}$.

В задачах 9.162—9.167 найти вторую производную функции, заданной параметрически.

9.162. $x=2t^3$, $y=t^2$.

9.163. $x=a(1-\cos t)$, $y=at$.

9.164. $x=\dfrac{a-t}{a+t}$, $y=\dfrac{t}{a+t}$.

9.165. $x=a\ln t$, $y=\dfrac{a}{2}\left(t+\dfrac{1}{t}\right)$.

9.166. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$.

9.167. $x=t\cos t$, $y=t\sin t$.

В задачах 9.168—9.171 найти производную третьего порядка от функции.

9.168. $y=3x^3-4x^2+5x-7$.

9.169. $y=\sin 2x$.

9.170. $y=e^{3x}$.

9.171. $y=x^4-5x^3+6x^2-2x+9$.

В задачах 9.172, 9.173 найти производную четвертого порядка от функции.

9.172. $y=x^4-5x^3+4x^2-3x+7$.

9.173. $y=\ln(x+1)$.

В задачах 9.174, 9.175 найти производную пятого порядка от функции.

9.174. $y=\cos 2x$.

9.175. $y=1/(1+x^2)$.

В задачах 9.176—9.181 найти вторую производную неявной функции.

9.176. $y^2-2px=0$.

9.177. $y-x-\mathrm{arctg}\,y=0$.

9.178. $y+2x-\mathrm{arcctg}\,y=0$.

9.179. $x^3+y^3-3xy=0$.

9.180. $x^2+y^2-a^2=0$.

9.181. $b^2x^2-a^2y^2-a^2b^2=0$.

В задачах 9.182—9.185 вычислить значение второй производной неявной функции в заданной точке.

9.182. $\ln y-2x=0$, $M(0,1)$.

9.183. $xy^2-4=0$, $M(1,2)$.

9.184. $e^x+x+y=0$, $M(0,-1)$.

9.185. $x^2+y^2-25=0$, $M(3,4)$.

9.7. Дифференциал функции

Дифференциалом функции $y=f(x)$ называется произведение ее производной на приращение независимой переменной:

$$dy=f'(x)\Delta x\quad\text{или}\quad dy=f'(x)dx,\qquad (9.15)$$

так как $\Delta x=dx$. Из второй формулы следует, что $f'(x)=dy/dx$.

При достаточно малых Δx справедлива приближенная формула

$$f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)\Delta x$$

или

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\Delta x.\qquad (9.16)$$

Примеры. 1. Найти дифференциал функции $y=e^{2x}$.

По формуле (9.15) получаем

$$dy=d(e^{2x})=(e^{2x})'dx=2e^{2x}dx.$$

2. Вычислить значение дифференциала функции $y=x^4-4x^2+3$, если x изменяется от 2 до 2,1.

Найдем сначала выражение для дифференциала данной функции:

$$dy=(x^4-4x^2+3)'dx=(4x^3-8x)dx=4x(x^2-2)dx.$$

Вычислим значение дифференциала при указанном значении $x=2$ и $dx=\Delta x=2{,}1-2=0{,}1$:

$$dy=4\cdot 2(2^2-2)0{,}1=8\cdot 2\cdot 0{,}1=1{,}6.$$

3. Вычислить приближенно значение функции $f(x)\sqrt[3]{1+7x^2}$ при $x=1{,}1$.

Значения функции и ее производной $f'(x)=\dfrac{14x}{3\sqrt[3]{(1+7x^2)^2}}$ находятся легко при $x=1$.

Воспользуемся формулой (9.16), которая при $x=1$, $\Delta x=0{,}1$ принимает вид

$$\sqrt[3]{1+7(1{,}1)^2}\approx\sqrt[3]{1+7\cdot 1^2}+\frac{1}{3}\,\frac{14\cdot 1}{\sqrt[3]{(1+7\cdot 1^2)^2}}\,0{,}1,$$

т. е.

$$\sqrt[3]{1+7(1{,}1)^2}\approx\sqrt[3]{8}+\frac{1{,}4}{3\sqrt[3]{8^2}}=2+\frac{1{,}4}{12}\approx 2{,}117.$$

В задачах 9.186—9.199 найти дифференциал функции.

9.186. $y=x^2+5x-7$.

9.187. $y=(x+2)/(x+3)$.

9.188. $y=\ln\left|\dfrac{x-5}{x+5}\right|$.

9.189. $y=e^{\sin 3x}$.

9.190. $y=\ln(x+\sqrt{x^2+a})$.

9.191. $y=\cos 5x$.

9.192. $y=\operatorname{tg} 2x$.

9.193. $y=\arcsin\dfrac{x-2}{3}$.

9.194. $y=\operatorname{arcctg} 4x$.

9.195. $y=\operatorname{sh}^4 3x$.

9.196. $y=\operatorname{ch}^3 2x$.

9.197. $y=e^{\sqrt{x^2+5}}$

9.198. $y=\dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}\right|+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}(2x-1)}{3}$.

9.199. $y=\dfrac{1}{12}\left[\ln\dfrac{(x-1)^2}{x^2+2x+3}-2\sqrt{2}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2}(x+1)}{2}\right]$.

В задачах 9.200—9.205 вычислить значение дифференциала функции при указанных значениях x и Δx.

9.200. $y=x^3+3x^2-5x+4$, $x=1$, $\Delta x=0{,}1$.

9.201. $y=x^4+4x^3+5x^2-7$, $x=-1$, $\Delta x=0{,}01$.

9.202. $y=e^{x^2}$, $x=1$, $\Delta x=-0{,}01$.

9.203. $y=\sin 2x$, $x=\pi/6$, $\Delta x=0{,}001$.

9.204. $y=\sqrt{x^2+4x-3}$, $x=2$, $\Delta x=-0{,}1$.

9.205. $y=\lg(1+x^2)$, $x=3$, $\Delta x=0{,}1$.

В задачах 9.206—9.209 вычислить приближенно значение функции при указанном значении аргумента.

9.206. $y=\sqrt{x^3+x^2+4}$, $x=2{,}1$.

9.207. $y=e^x$, $x=-1{,}1$.

9.208. $y=\sqrt[3]{\dfrac{3-x}{3+x}}$, $x=0{,}18$.

9.209. $y=e^{x^2-9}$, $x=3{,}15$.

В задачах 9.210—9.215 вычислить приближенно значение выражения.

9.210. $\operatorname{arctg} 1{,}03$.

9.211. $\sin 29°$.

9.212. $\operatorname{tg} 45°20'$.

9.213. $e^{-0{,}85}$

9.214. $\sqrt{80}$.

9.215. $\sqrt[3]{65}$.

10. ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

С помощью производной можно находить многие пределы (раскрывать соответствующие неопределенности), исследовать функции и строить их графики, решать задачи на отыскание наибольших и наименьших значений функций. Производная применяется также при численном решении уравнений.

10.1. Правило Лопиталя — Бернулли

Если $y=f(x)$ и $y=\varphi(x)$ — дифференцируемые бесконечно малые или бесконечно большие функции при $x\to a$, то

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \qquad (10.1)$$

Формулой (10.1) и выражается правило Лопиталя—Бернулли: *предел отношения двух бесконечно малых или двух бесконечно больших функций равен пределу отношения их производных, если последний существует или равен бесконечности.*

Правило это применимо и в случае, когда $a=\infty$.

Примеры. 1. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\cos x-1}{x^2+5x}$.

При $x\to 0$ числитель и знаменатель дроби стремятся к нулю; имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Раскроем эту неопределенность с помощью правила Лопиталя—Бернулли. По формуле (10.1) получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\cos x-1}{x^2+5x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x\cos x-e^x\sin x}{2x+5}=\frac{1}{5}.$$

2. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin 2x-2x}{3x^2-x^3}$.

Это также неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Для раскрытия ее правило Лопиталя — Бернулли необходимо применить дважды:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin 2x-2x}{3x^2-x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin 2x+2e^x\cos 2x-2}{6x-3x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4e^x\cos 2x-3e^x\sin 2x}{6-6x}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

3. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

Это неопределенность вида $\infty-\infty$. Приведя выражение в скобках к общему знаменателю, получим неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}.$$

Чтобы раскрыть эту неопределенность, правило Лопиталя — Бернулли необходимо применить четыре раза:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\sin 2x}{2x\sin^2 x+x^2\sin 2x}=$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2-2\cos 2x}{2\sin^2 x + 4x \sin 2x + 2x^2 \cos 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{4\sin 2x}{6\sin 2x + 12x\cos 2x - 4x^2 \sin 2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{8\cos 2x}{24\cos 2x - 32x\sin 2x - 8x^2\cos 2x} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}.$$

Замечание. Прежде чем воспользоваться правилом Лопиталя — Бернулли, можно заменить знаменатель дроби эквивалентной бесконечно малой ($x^2 \sin^2 x \sim x^4$), а затем применить два раза указанное правило и найти предел элементарным способом:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{2x - \sin 2x}{4x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{2-2\cos 2x}{2x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{6x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 x}{6x^2} = \frac{1}{3}.$$

4. Найти $\lim\limits_{x\to 0} x^x$.

Это неопределенность вида 0^0. Полагая $x^x = y$ и логарифмируя это равенство по основанию e, получаем $x \ln x = \ln y$.

Найдем $\lim\limits_{x\to 0} \ln y = \lim\limits_{x\to 0} x \ln x$. В правой части последнего равенства нужно раскрыть неопределенность вида $0 \cdot \infty$. Преобразуем функцию $x \ln x$ следующим образом:

$$x \ln x = \frac{\ln x}{1/x}.$$

Получаем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$.

Применяя правило Лопиталя — Бернулли, находим

$$\lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} x \ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0} (-x) = 0.$$

Следовательно, $\ln(\lim\limits_{x\to 0} y) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} y = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} x^x = 1$.

В задачах 10.1—10.40 найти предел функции в данной точке.

10.1. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 9}$.

10.2. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1}$.

10.3 $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^5 - 6x + 5}{x-1}$.

10.4. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3 + x^2 - 3x - 6}{x-2}$.

10.5. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{2x - \sin 2x}{x^3}$.

10.6. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{\ln x}$.

10.7. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - \cos(x/3)}{1 - \cos 3x}$.

10.8. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - e^{-2x}}{\operatorname{tg} 3x}$.

10.9. $\lim\limits_{x\to \pi/2} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 7x}$.

10.10. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^4}$.

10.11. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{e^{2x} - 1}\right)$.

10.12. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x\right)$.

10.13. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\operatorname{ctg} x}{x}\right)$.

10.14. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \sin x}\right)$.

10.15. $\lim\limits_{x\to 1-0} \ln x \cdot \ln(1-x)$.

10.16. $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{ctg}(x/4)$.

10.17. $\lim\limits_{x\to +0} x^{\frac{1}{\ln \operatorname{ctg} x}}$.

10.18. $\lim\limits_{x\to +0} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$.

10.19. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\cos \frac{x}{2}\right)^{1/x^2}$.

10.20. $\lim\limits_{x\to 1} (2-x)^{\operatorname{tg}(\pi x/2)}$.

10.21. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^4 - x^3 + x^2 - 1}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 1}$.

10.22. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)}$.

10.23. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$.

10.24. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x + 2\sin^2 x - 2\sin x}{\cos x - \cos^2 x}$.

10.25. $\lim\limits_{x\to a} \ln\left(2 - \frac{x}{a}\right) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2a}$.

10.26. $\lim\limits_{x\to \infty} \sin \frac{c}{x} \cdot \ln(a + be^x)$.

10.27. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x\right)$.

10.28. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{1/x^2}$.

10.29. $\lim\limits_{x\to \infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

10.30. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$.

10.31. $\lim\limits_{x\to 0} x^m (\ln x)^n$ $(m>0, n>0)$.

10.32. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x - 1{,}5\sin 2x}$.

10.33. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{\cos x - \cos 2x}$.

10.34. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$.

10.35. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x^2(e^x + e^{-x})^2}{x^4}$.

10.36. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln x}{6 + 7\ln \sin x}$.

10.37. $\lim\limits_{x\to a} \frac{\ln(x-a)}{\ln(e^x - e^a)}$.

10.38. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$.

10.39. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{1/(\ln(e^x - 1))}$.

10.40. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right)^{1/x}$.

10.2. Касательная и нормаль к плоской кривой. Кривизна кривой

Касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ называется прямая M_0T — предельное положение секущей MM_0, при условии, что точка M стремится к M_0 вдоль данной кривой (рис. 10.1).

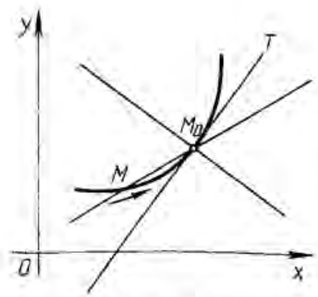


Рис. 10.1

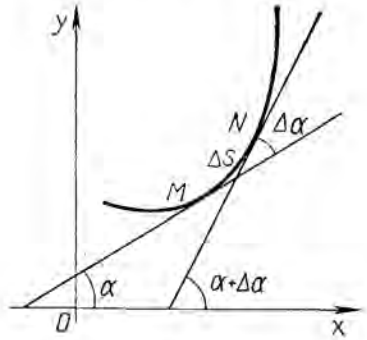


Рис. 10.2

Нормалью к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ называется прямая, проходящая через эту точку и перпендикулярная к касательной в точке M_0 (см. рис. 10.1).

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0). \tag{10.2}$$

Уравнение нормали к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \tag{10.3}$$

Углом между кривыми в их общей точке M_0 называется угол между касательными к этим кривым в точке M_0.

Кривизной кривой в ее точке M называется предел модуля отношения угла $\Delta\alpha$ между касательными в точках M и N кривой к длине дуги $\overset{\frown}{MN} = \Delta s$ при $N \to M$ (рис. 10.2), т. е.

$$k = \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|,$$

где угол α выражен в радианах.

Кривизна кривой $y = f(x)$ вычисляется по формуле

$$k = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}. \tag{10.4}$$

Примеры. 1. Составить уравнения касательной и нормали к линии $y = x^2 - 4x + 5$ в точке $M_0(3, 2)$.

Точка $M_0(3, 2)$ лежит на линии, так как ее координаты удовлетворяют данному уравнению. Находим производную функции $f(x) = x^2 - 4x + 5$ и ее значение при $x_0 = 3$:

$$f'(x) = 2x - 4, \quad f'(x_0) = f'(3) = 2 \cdot 3 - 4 = 2.$$

В соответствии с формулами (10.2) и (10.3) получаем уравнения касательной и нормали:

$$y - 2 = 2(x - 3), \quad 2x - y - 4 = 0;$$

$$y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 3), \quad x + 2y - 7 = 0.$$

2. Под каким углом линия $x^2 - 8xy + y^2 + 4x - 6y + 8 = 0$ пересекает прямую $5x - y - 4 = 0$?

Найдем точки пересечения линий. Подставляя выражение $y = 5x - 4$ в первое из уравнений, получаем квадратное уравнение $7x^2 + 17x - 24 = 0$, корни которого $x_1 = -24/7$, $x_2 = 1$. Этим значениям x соответствуют значения $y = 5x - 4$: $y_1 = -148/7$, $y_2 = 1$. Следовательно, линии пересекаются в двух точках $M(-24/7, -148/7)$ и $N(1, 1)$.

Определим угол, под которым линия пересекает прямую в точке N. Составим уравнение касательной к этой линии в указанной точке. Найдем производную неявной функции $x^2 - 8xy + y^2 + 4x - 6y + 8 = 0$ и ее значение в точке $N(1, 1)$:

$$2x - 8y - 8xy' + 2yy' + 4 - 6y' = 0,$$

$$(x - 4y + 2) + y'(-4x + y - 3) = 0,$$

$$y' = \frac{x - 4y + 2}{4x - y + 3}, \quad y'_0 = \frac{1 - 4\cdot 1 + 2}{4\cdot 1 - 1 + 3} = -\frac{1}{6}, \quad k_1 = -\frac{1}{6}.$$

Поскольку угловой коэффициент данной кривой $k_2 = 5$, то

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2} = \frac{5 + 1/6}{1 + 5(-1/6)} = 31, \quad \varphi = \operatorname{arctg} 31.$$

Аналогично находится угол, под которым линия пересекает прямую в точке M.

3. Вычислить кривизну кривой $y = x^3 - 5x^2 + 10x - 7$ в точке $M(1, -1)$.

Находим выражения для производных:

$$y' = f'(x) = 3x^2 - 10x + 10, \quad y'' = f''(x) = 6x - 10$$

и их значения при $x = 1$: $y'_0 = f'(1) = 3$, $y'' = f''(1) = -4$. Подставляя эти значения в формулу (10.4), получаем

$$k = \frac{|-4|}{\sqrt{(1 + 3^2)^3}} = \frac{4}{10\sqrt{10}} = \frac{2}{5\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{25}.$$

В задачах 10.41—10.48 составить уравнения касательной и нормали к линии, заданной уравнением, в указанной точке M.

10.41. $f(x) = x^2 + 4x - 26$, $M(4, 6)$.

10.42. $f(x) = 3x - x^2 + 7$, $M(5, -3)$.

10.43. $f(x) = x^3 + 4x + 6$, $M(-1, 1)$.

10.44. $f(x) = 2x^3 + 3x - 9$, $M(1, -4)$.

10.45. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5$, $M(3, 4)$.

10.46. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$, $M(2, 2)$.

10.47. $f(x) = x^4 - 4x^2 + 6$, $M(1, 3)$.

10.48. $f(x) = x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 1$, $M(0, 1)$.

В задачах 10.49—10.56 составить уравнения касательной и нормали к линии, заданной неявным уравнением, в указанной точке M.

10.49. $3x^2 + 4xy - 4x - 8y = 0$, $M(1, -1/4)$.

10.50. $x^2 + 4xy + 4y^2 + 6x - 3y + 15 = 0$, $M(-2, 1)$.

10.51. $4x^2 - 4xy + y^2 - 4x - 8y + 20 = 0$, $M(1, 2)$.

10.52. $x^2 + 2xy + y^2 - 9x + 8y + 16 = 0$, $M(0, -4)$.

10.53. $x^2 - 2xy + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0$, $M(5, 0)$.

10.54. $11x^2 - 16xy - y^2 - 26x + 22y + 10 = 0$, $M(1, 1)$.

10.55. $17x^2 + 12xy + 8y^2 + 22x - 4y - 55 = 0$, $M(1, 1)$.

10.56. $9x^2 + 4xy + 6y^2 - 8x + 16y - 50 = 0$, $M(2, 1)$.

В задачах 10.57—10.60 составить уравнения касательной и нормали к линии, заданной параметрическими уравнениями, при указанном значении параметра t.

10.57. $x = t$, $y = t^2$, $t = 2$.

10.58. $x = t + 1$, $y = \dfrac{1}{t - 2}$, $t = 1$.

10.59. $x = t^3$, $y = t^4$, $t = 1$.

10.60. $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$, $t = \pi/2$.

В задачах 10.61—10.68 найти угол, под которым пересекаются линии.

10.61. $11x^2 - 16xy - y^2 - 26x + 22y + 10 = 0$, $x = 1$.

10.62. $4x^2 - 4xy + y^2 - 4x - 8y + 20 = 0$, $y = 2$.

10.63. $x^2 + 4xy + y^2 - 8x + 2y - 9 = 0$, $x - y + 1 = 0$.

10.64. $x^2 - 3xy + y^2 - 4x + 6y - 1 = 0,\ x + y - 2 = 0.$
10.65. $x^2 + 6xy + y^2 - 2x + 8y + 41 = 0,\ x + 10y + 39 = 0.$
10.66. $x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 8y + 16 = 0,\ 3x - y - 4 = 0.$
10.67. $x^2 + 6xy + y^2 - 2x + 8y - 14 = 0,\ 10x + 3y - 13 = 0.$
10.68. $(x-5)^2 + (y-6)^2 = 25,\ (x+2)^2 + (y-6)^2 = 32.$

В задачах 10.69—10.76 вычислить кривизну линии в указанной точке M.

10.69. $f(x) = x^2 + 2x - 5$, $M(1, -2)$.
10.70. $f(x) = x^2 - 3x + 4$, $M(2, 2)$.
10.71. $f(x) = x^3 + 4x + 6$, $M(-1, 1)$.
10.72. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$, $M(1, 2)$.
10.73. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 2$, $M(0, 2)$.
10.74. $f(x) = x^4 - 4x + 6$, $M(1, 3)$.
10.75. $f(x) = x^5 - 5x^4 + 6x^3 - 7x^2 + 8x - 4$, $M(1, -1)$.
10.76. $f(x) = x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 3x + 1$, $M(0, 1)$.

10.77. В какой точке касательная к линии $2y = x^3 - 5x^2 + 6x - 3$ параллельна прямой $3x - y - 5 = 0$?

10.78. В какой точке касательная к линии $y = x^3 - 11x - 15$ перпендикулярна к прямой $2x + 2y - 7 = 0$?

10.79. В какой точке кривизна линии $y = x^2 - x + 7$ равна $\sqrt{2}/2$?

10.80. В какой точке касательная к линии $y = x^2 + 4x - 5$ образует с прямой $3x - 2y + 7 = 0$ угол $\varphi = \pi/4$?

10.81. В какой точке касательная к линии $y = 2x^2 - 4x + 3$ образует с прямой $2x + y - 9 = 0$ угол φ, для которого $\operatorname{tg}\varphi = 0{,}8$?

10.3. Возрастание и убывание функции. Экстремум функции. Наибольшее и наименьшее значения функции

Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* (рис. 10.3, *а*) в некотором промежутке, если для любых точек x_1 и x_2, принадлежащих данному промежутку, из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

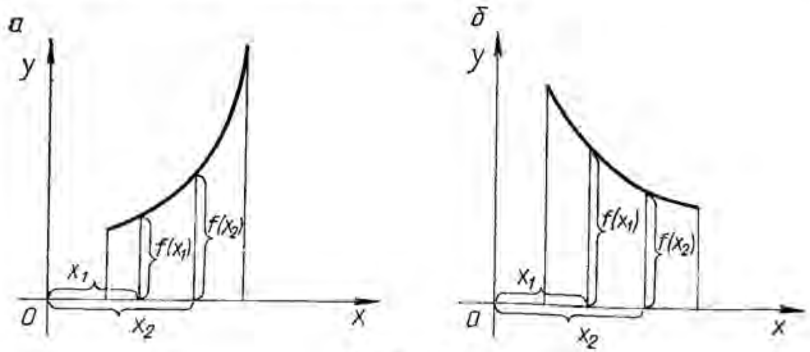


Рис. 10.3

Функция $y = f(x)$ называется *убывающей* в некотором промежутке (рис. 10.3, *б*), если для любых точек x_1 и x_2, принадлежащих данному промежутку, из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

Достаточное условие возрастания (убывания) функции. *Если в некотором промежутке производная данной функции положительна, то функция возрастает в этом промежутке, если отрицательна, то функция убывает в этом промежутке.*

Максимумом функции $y = f(x)$ называется такое ее значение $y_1 = f(x_1)$, которое больше всех других ее значений, принимаемых в точках x, достаточно близких к точке x_1 и отличных от нее (рис. 10.4, *а*), т. е. $f(x_1) > f(x)$.

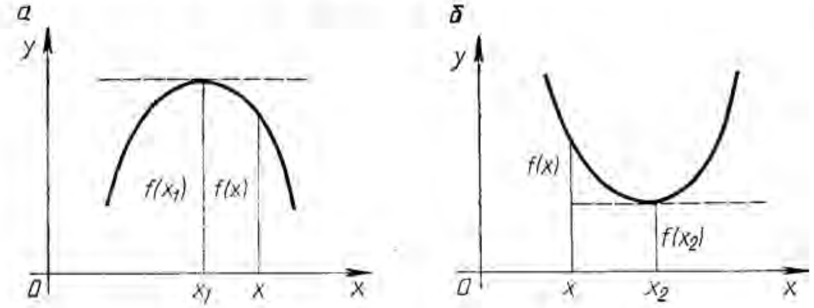


Рис. 10.4

Минимумом функции $y = f(x)$ называется такое ее значение $y_2 = f(x_2)$, которое меньше всех других ее значений, принимаемых в точках x, достаточно близких к точке x_2 и отличных от нее (рис. 10.4, *б*), т. е. $f(x_2) < f(x)$.

Максимум и минимум функции называются *экстремумом* функции. Значения аргумента функции, при которых достигается экстремум, называются *точками экстремума*.

Достаточное условие экстремума. Первое правило. *Если в точке $x = x_0$ производная функции $y = f(x)$ обращается в нуль и при переходе через эту точку меняет знак, то $f(x_0)$ — экстремум функции, причем:* 1) *функция имеет максимум в точке x_0, если знак производной меняется с плюса на минус* (*т. е.* $f'(x) > 0$ *при* $x_0 - \varepsilon < x < x_0$, $f'(x) < 0$ *при* $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$); 2) *функция имеет минимум в точке x_0, если знак производной меняется с минуса на плюс* (*т. е.* $f'(x) < 0$ *при* $x_0 - \varepsilon < x < x_0$, $f'(x) > 0$ *при* $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$).

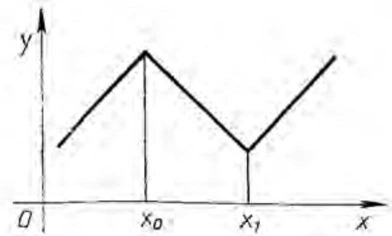


Рис. 10.5

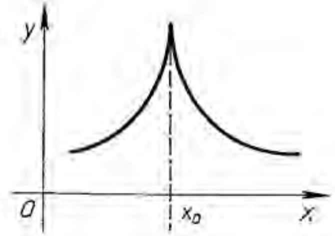


Рис. 10.6

Замечание. В точке экстремума производная может не существовать (рис. 10.5) или обращаться в бесконечность (рис. 10.6), но обязательно меняет в ней знак. В этом случае экстремум называется *острым* (в противоположность *гладкому* экстремуму, который имеет функция с непрерывной производной).

В т о р о е п р а в и л о. *Если в точке $x = x_0$ первая производная функции $y = f(x)$ равна нулю, а вторая производная отлична от нуля, то x_0 — точка экстремума, причем:* 1) *x_0 — точка максимума, если $f''(x_0) < 0$;* 2) *x_0 — точка минимума, если $f''(x_0) > 0$.*

Чтобы найти наибольшее значение функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$, необходимо вычислить значения ее максимумов на этом отрезке, значения функции на его концах, т. е. $f(a)$, $f(b)$, и из полученных чисел выбрать самое большое. Аналогично находится наименьшее значение функции.

П р и м е р ы. 1. Найти промежутки возрастания и убывания функции

$$f(x) = x^5 + 5x^4 + 5x^3 - 8.$$

Данная функция определена при всех x, областью ее определения является бесконечный промежуток $(-\infty, +\infty)$. Производная этой функции

$$f'(x) = 5x^4 + 20x^3 + 15x^2 = 5x^2(x^2 + 4x + 3)$$

обращается в нуль в трех точках: $x_1 = -3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$, которые делят область определения на четыре интервала: $(-\infty, -3)$, $(-3, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, \infty)$.

Поскольку $f'(x) = 5x^2(x+1)(x+3) > 0$ при $x < -3$, то функция возрастает в промежутке $(-\infty, -3)$.

Так как $f'(x) < 0$ при $-3 < x < -1$, то функция убывает в промежутке $(-3, -1)$.

Аналогично устанавливаем, что в промежутке $(-1, 0)$ функция возрастает (ибо $f'(x) > 0$ при $-1 < x < 0$), в промежутке $(0, \infty)$ она также возрастает ($f'(x) > 0$ при $x > 0$).

2. Найти экстремумы функции $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

Производная данной функции

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1)$$

определена для всех x и обращается в нуль при $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Исследуем эти критические точки с помощью второй производной $f''(x) = 6x$.

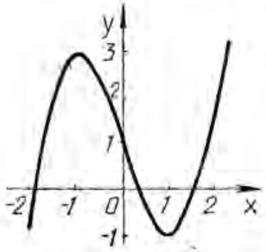


Рис. 10.7

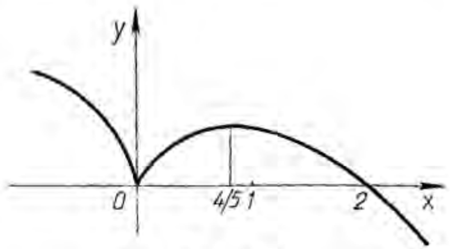


Рис. 10.8

Поскольку $f''(-1) = 6(-1) = -6 < 0$, то $x_1 = -1$ — точка максимума; так как $f''(1) = 6 \cdot 1 > 0$, то $x_2 = 1$ — точка минимума.

Вычисляем значения экстремумов:

$$\max f(x) = f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 1 = 3,$$
$$\min f(x) = f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 1 = -1.$$

График функции изображен на рис. 10.7.

3. Найти экстремумы функции $f(x) = (2-x)\sqrt[3]{x^2}$.

Находим производную функции $f(x) = (2-x)\,x^{2/3}$:

$$f'(x) = -\sqrt[3]{x^2} + (2-x)\frac{2}{3}x^{-1/3} = -\sqrt[3]{x^2} + \frac{2(2-x)}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{4-5x}{3\sqrt[3]{x}}$$

и критические точки $x_1 = 4/5$, $x_2 = 0$. (При $x_1 = 4/5$ $f'(x) = 0$, при $x_2 = 0$ производная терпит разрыв.) Исследуем критические точки с помощью первого правила. Так как $f'(x) > 0$ при $0 < x < 4/5$ и $f'(x) < 0$ при $x > 4/5$, то $x_1 = 4/5$ — точка максимума, причем

$$\max f(x) = f\left(\frac{4}{5}\right) = \left(2 - \frac{4}{5}\right)\sqrt[3]{\frac{16}{25}} = \frac{6}{5}\sqrt[3]{\frac{16}{25}}.$$

Поскольку $f'(x) < 0$ при $x < 0$ и $f'(x) > 0$ при $0 < x < 4/5$, то $x_2 = 0$ — точка минимума, причем

$$\min f(x) = f(0) = (2-0) \cdot 0 = 0.$$

График функции изображен на рис. 10.8.

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$ на отрезке $[-2, 2]$.

Находим экстремумы функции:

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1), \quad f'(x) = 0, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1;$$
$$f''(x) = 12x^2 - 4 = 4(3x^2 - 1), \quad f''(-1) = 4(3-1) > 0,$$
$$f''(1) = 4(3-1) > 0, \quad f''(0) < 0;$$

$x_1 = -1$, $x_3 = 1$ — точки минимума, $x_2 = 0$ — точка максимума, $\min f(x) = f(-1) = f(1) = 1 - 2 + 3 = 2$, $\max f(x) = f(0) = 3$.

Находим значения функции на концах отрезка:

$$f(-2) = f(2) = 2^4 - 2 \cdot 4 + 3 = 11.$$

Следовательно, наименьшее значение функции на данном отрезке равно 2, а наибольшее равно 11.

В задачах 10.82—10.91 найти промежутки возрастания и убывания функции.

10.82. $f(x) = x^3 + 4x^2 - 7$.
10.83. $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3$.
10.84. $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x - 12$.
10.85. $f(x) = x^3 - 6x + 7$.
10.86. $f(x) = x^4 - 4x^2 + 5$.
10.87. $f(x) = 5x^2 - x^4 - 6$.
10.88. $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 2$.
10.89. $f(x) = x^6 - 7{,}5x^4 + 12x^2 - 10$.
10.90. $f(x) = x + \sqrt{x-1}$.
10.91. $f(x) = (x-4)\sqrt[3]{x^2}$.

В задачах 10.92—10.101 найти экстремумы функции.

10.92. $f(x) = x^3 - 3x + 5$.
10.93. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$.
10.94. $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x - 2$.
10.95. $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 5$.
10.96. $f(x) = x^4 - 10x^2 + 15$.
10.97. $f(x) = 13x^2 - x^4 + 30$.
10.98. $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 4$.
10.99. $f(x) = x^6 - 6x^4 + 9x^2$.
10.100. $f(x) = (e^x + e^{-x})/2$.
10.101. $f(x) = (e^x - e^{-x})/2$.

В задачах 10.102—10.107 найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке $[-2, 2]$.

10.102. $f(x) = x^3 + 3x - 5$.
10.103. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 6$.
10.104. $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7x - 3$.
10.105. $f(x) = 9x^3 + 6x^2 - 1$.
10.106. $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$.
10.107. $f(x) = x^3 - 12x + 5$.

В задачах 10.108—10.115 найти наибольшее и наименьшее значения функции в ее области определения.

10.108. $f(x) = \dfrac{x}{(1+x^2)^2}$. **10.109.** $f(x) = \dfrac{3x^2-1}{(1+x^2)^3}$.

10.110. $f(x) = \dfrac{24\,(5x^4-10x^2+1)}{(1+x^2)^5}$. **10.111.** $f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{x^2+4x+5}$.

10.112. $f(x) = x \ln x$. **10.113.** $f(x) = e^{-x^2}$.

10.114. $f(x) = e^x/x$. **10.115.** $f(x) = (\ln x^2)/x$.

10.4. Направления вогнутости кривой. Точки перегиба. Асимптоты кривой

График функции $y = f(x)$ называется *вогнутым вверх* (или *выпуклым вниз*) в промежутке (a, b), если соответствующая дуга кривой расположена выше касательной, проведенной в любой точке $M(x, f(x))$ этой дуги (рис. 10.9).

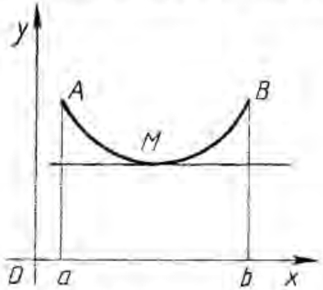


Рис. 10.9

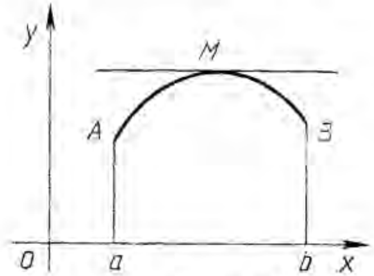


Рис. 10.10

График функции $y = f(x)$ называется *вогнутым вниз* (или *выпуклым вверх*) в промежутке (a, b), если соответствующая дуга кривой расположена ниже касательной, проведенной в любой точке $M(x, f(x))$ этой дуги (рис. 10.10).

Достаточное условие вогнутости (выпуклости) кривой. *Если вторая производная $f''(x)$ функции $y = f(x)$ положительна в промежутке (a, b), то график этой функции вогнут вверх в данном промежутке. Если вторая производная $f''(x)$ отрицательна в промежутке (a, b), то график функции $y = f(x)$ вогнут вниз в этом промежутке.*

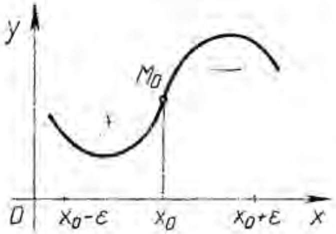


Рис. 10.11

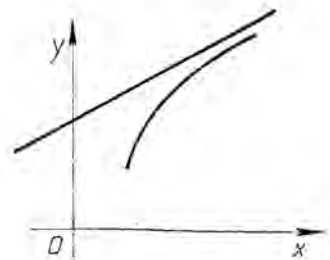


Рис. 10.12

Точкой перегиба непрерывной кривой называется такая ее точка M_0 (рис. 10.11), при переходе через которую кривая меняет свою вогнутость на выпуклость или наоборот (относительно одного и того же направления, например вниз).

Достаточное условие точки перегиба. *Если вторая производная $f''(x)$ функции $y = f(x)$ в точке x_0 равна нулю и меняет знак при переходе через эту точку, то $M_0(x_0, f(x_0))$ — точка перегиба графика этой функции.*

Асимптотой кривой называется прямая, к которой неограниченно приближается точка этой кривой при неограниченном удалении от начала координат (рис. 10.12). Различают асимптоты вертикальные и невертикальные.

Если хотя бы один из односторонних пределов функции $y = f(x)$ в точке a является бесконечным, т. е.

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = \infty \text{ или } \lim_{x\to a+0} f(x) = \infty, \tag{10.5}$$

то прямая $x = a$ называется *вертикальной асимптотой* графика этой функции.

Если в правой части уравнения $y = f(x)$ можно выделить линейную часть

$$f(x) = kx + b + \alpha(x), \tag{10.6}$$

где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to \infty$, то прямая $y = kx + b$ называется *невертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$.

Если существуют пределы:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = b, \tag{10.7}$$

то уравнение $y = kx + b$ определяет невертикальную асимптоту графика функции $y = f(x)$.

Если существуют пределы:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = k_1, \quad \lim_{x\to-\infty} (f(x) - k_1x) = b_1, \tag{10.8}$$

то уравнение $y = k_1x + b_1$ определяет другую невертикальную асимптоту графика функции $y = f(x)$.

Если линия задана параметрическими уравнениями $x = \varphi_1(t)$, $y = \varphi_2(t)$, то сначала выясняют, имеются ли значения параметров, при которых одна из функций обращается в бесконечность, а другая остается конечной. При $\varphi_1(t_0) = \infty$, $\varphi_2(t_0) = b$ кривая имеет асимптоту $y = b$, при $\varphi_1(t_1) = a$, $\varphi_2(t_1) = \infty$ — вертикальную асимптоту $x = a$.

Если $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0) = \infty$, причем

$$\lim_{t\to t_0} \frac{\varphi_2(t)}{\varphi_1(t)} = k, \quad \lim_{t\to t_0} (\varphi_2(t) - k\varphi_1(t)) = b, \tag{10.9}$$

то линия имеет асимптоту, уравнение которой $y = kx + b$.

Примеры. 1. Найти промежутки выпуклости и точки перегиба графика функции $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 5$.

Находим производные данной функции:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3, \quad f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1).$$

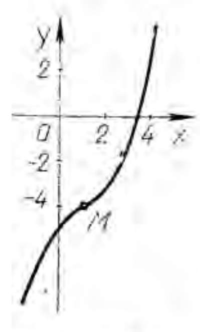


Рис. 10.13

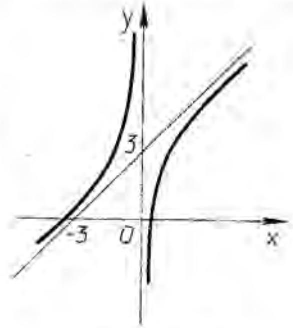


Рис. 10.14

Вторая производная равна нулю при $x = 1$. Если $x < 1$, то $f''(x) < 0$, поэтому график функции является выпуклым вверх в промежутке $(-\infty, 1)$. Поскольку $f''(x) > 0$ при $x > 1$, то график функции является выпуклым вниз в промежутке $(1, +\infty)$. Так как при $x = 1$ вторая производная меняет знак, то $M(1, -4)$ — точка перегиба графика функции $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 5$ (рис. 10.13).

2. Найти асимптоты графика функции $f(x) = \dfrac{x^2+3x-2}{x}$.

Поскольку

$$\lim_{x\to-0} f(x) = \lim_{x\to-0} \frac{x^2+3x-2}{x} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0} \frac{x^2+3x-2}{x} = -\infty,$$

то уравнение $x = 0$ определяет вертикальную асимптоту графика данной функции (в соответствии с формулой (10.5)).

Так как $f(x) = x + 3 - 2/x$, где $-2/x \to 0$ при $x \to \infty$, то уравнение $y = x + 3$ определяет невертикальную асимптоту графика данной функции (в соответствии с формулой (10.6)).

График функции изображен на рис. 10.14.

3. Найти асимптоты графика функции $f(x) = \dfrac{x^2}{1-|x|}$.

В соответствии с определением абсолютной величины можно записать:

$$f(x) = \frac{x^2}{1-x} \text{ при } x > 0, \quad f(x) = \frac{x^2}{1+x} \text{ при } x < 0.$$

Поскольку

$$\lim_{x\to1} \frac{x^2}{1-x} = \infty, \quad \lim_{x\to-1} \frac{x^2}{1+x} = \infty,$$

то уравнения $x = 1$, $x = -1$ определяют вертикальные асимптоты графика данной функции (рис. 10.15).

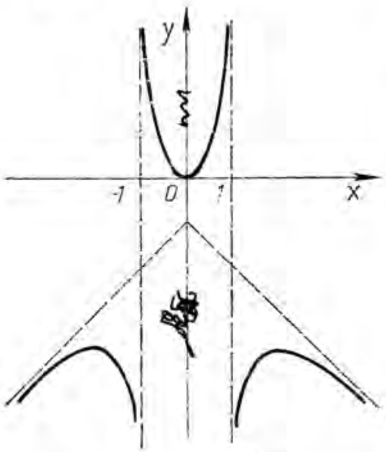


Рис. 10.15

Чтобы найти невертикальные асимптоты, воспользуемся формулами (10.7) и (10.8). Так как

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{1-x} : x = $$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1-x} = -1,$$

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2}{1-x} + x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 + x(1-x)}{1-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1-x} = -1,$$

то уравнение $y = -x - 1$ определяет невертикальную асимптоту графика функции.

Аналогично находим вторую невертикальную асимптоту, она определяется уравнением $y = x - 1$.

4. Найти асимптоту кривой, заданной параметрическими уравнениями: $x = t + 2$, $y = \dfrac{t+1}{t-1}$.

Поскольку при $t \to 1$ $y \to \infty$, $x \to 3$, то $x = 3$ — уравнение вертикальной асимптоты.

При $t \to \infty$ $x \to \infty$, $y \to 1$, поэтому $y = 1$ — уравнение невертикальной (горизонтальной) асимптоты.

Замечание. Исключая параметр t из данных уравнений, получаем $y = \dfrac{x-1}{x-3}$ или $(x-3)(y-1) = 2$. Рассматривая это уравнение, находим асимптоты: $x = 3$, $y = 1$.

В задачах 10.116—10.125 найти промежутки выпуклости и точки перегиба графика функции.

10.116. $f(x) = x^3 - 6x + 7$. **10.117.** $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 5$.

10.118. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9$. **10.119.** $f(x) = x^3 + 6x^2 - 7x + 8$.

10.120. $f(x) = x^4 - 6x^2 + 5x - 9$.

10.121. $f(x) = x^4 - 12x^2 + 10$.

10.122. $f(x) = x^5 - 10x^3 + 6x + 2$.

10.123. $f(x) = x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 4$.

10.124. $f(x) = 1/(x-2) + 3$. **10.125.** $f(x) = 1/(1 + x^2)$.

В задачах 10.126—10.143 найти асимптоты графика функции.

10.126. $y = x/(x^2 - 1)$. **10.127.** $y = 3/(x^3 - x)$.

10.128. $y = (4 + 2x - x^2)/x$. **10.129.** $y = (x^3 + 2x^2 - 5)/x^2$.

10.130. $y = \sqrt{x^2 - 4}$. **10.131.** $y = e^{1/(1-x)}$.

10.132. $b^2x^2 + a^2y^2 = x^2y^2$. **10.133.** $(x^2 + y^2)y^2 = a^2x^2$.

10.134. $x = t - 1$, $y = \dfrac{4}{t+2}$. **10.135.** $x = \dfrac{1}{t+3}$, $y = 2t - 5$.

10.136. $x = \dfrac{2t}{t^2 - 3t + 2}$, $y = \dfrac{t^2}{t^2 - 4t + 3}$.

10.137. $x = \dfrac{t^2}{t-1}$, $y = \dfrac{t}{t^2 - 1}$.

10.138. $y = \dfrac{2x^2 + 3x - 4}{x - 2}$. **10.139.** $y = \dfrac{3x^2 - 2x + 5}{x + 1}$.

10.140. $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$. **10.141.** $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$.

10.142. $y = \dfrac{x^2 + 4}{x^2 - 4}$. **10.143.** $y = \dfrac{1}{1 - e^x}$.

10.5. Исследование функций и построение их графиков

Исследование функций и построение их графиков можно проводить по следующей схеме.

1. Найти область определения функции, точки ее разрыва.
2. Исследовать изменение функции при x, стремящемся к концам промежутков области определения и точкам разрыва.
3. Найти точки экстремума и промежутки возрастания и убывания функции.
4. Вычислить значения экстремумов, построить соответствующие точки.

5. Определить интервалы выпуклости и вогнутости графика функции, найти точки перегиба.

6. Найти точки пересечения графика функции с координатными осями.

7. Найти асимптоты графика функции.

Если исследуемая функция четная или нечетная, то ее достаточно исследовать при положительных значениях аргумента из области ее определения и принять во внимание, что график четной функции симметричен относительно оси ординат, а график нечетной функции — относительно начала координат.

Иногда порядок исследования функции целесообразно выбирать исходя из конкретных ее особенностей.

Примеры. 1. Исследовать функцию $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$ и построить ее график.

1. Областью определения данной функции является бесконечный промежуток $(-\infty, +\infty)$.

2. Функция неограниченно возрастает при $x \to +\infty$, т. е. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; далее $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

3. Производная данной функции

$$f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$$

обращается в нуль при $x_1 = -2$ и $x_2 = 0$. Так как $f'(x) > 0$ при $x < -2$ и $x > 0$, то функция возрастает в промежутках $(-\infty, -2)$ и $(0, +\infty)$. Поскольку $f'(x) < 0$ при $-2 < x < 0$, то функция убывает в промежутке $(-2, 0)$. Отсюда уже можно заключить, что $x_1 = -2$ — точка максимума, $x_2 = 0$ — точка минимума. (Этот результат получается и с помощью второй производной $f''(x) = 6x + 6$: $f''(-2) = -12 + 6 = -6 < 0$, $f''(0) = 6 > 0$.)

4. Подставляя значения $x_1 = -2$ и $x_2 = 0$ в выражение для функции, вычисляем ее экстремальные значения:

$$\max f(x) = f(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 - 2 = 2,$$

$$\min f(x) = f(0) = -2.$$

Получены две точки графика $M_1(-2, 2)$, $M_2(0, -2)$.

5. Вторая производная $f''(x) = 6x + 6$ обращается в нуль при $x = -1$. Так как $f''(x) < 0$ при $x < -1$, то график функции является выпуклым вверх в промежутке $(-\infty, -1)$; поскольку $f''(x) > 0$ при $x > -1$, то график функции является выпуклым вниз в промежутке $(-1, +\infty)$; $N(-1, 0)$ — точка перегиба графика.

6. Решая уравнение $f(x) = 0$, т. е. $x^3 + 3x^2 - 2 = 0$, находим нули функции: $x_1 = -1 - \sqrt{3}$, $x_2 = -1$, $x_3 = -1 + \sqrt{3}$, поэтому $K_1(-1-\sqrt{3}, 0)$, $N(-1, 0)$, $K_2(-1+\sqrt{3}, 0)$ — точки пересечения графика функции с осью Ox. Положив в выражении $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$ $x = 0$, получим $y = -2$; $L(0, -2)$ — точка пересечения с осью Oy, она совпадает с точкой M_2.

7. Поскольку

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 + 3x^2 - 2}{x} = \infty,$$

т. е. не существует конечных пределов вида (10.7), то график данной функции асимптот не имеет.

Отметив полученные точки и приняв во внимание указанные результаты исследования функции, строим ее график (рис. 10.16).

2. Исследовать функцию $f(x) = \ln\left|\dfrac{x+2}{x-2}\right|$ и построить ее график.

1. Функция определена при всех x за исключением $x = -2$, $x = 2$, т. е. областью ее определения является множество трех интервалов: $(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$, $(2, +\infty)$.

2. Исследуем изменение функции при x, стремящемся к концам промежутков области определения:

$$\lim_{x\to-\infty} \ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right| = 0, \quad \lim_{x\to-2-0} \ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right| = -\infty, \quad \lim_{x\to-2+0} \ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right| = -\infty,$$

$$\lim_{x\to2-0} \ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right| = +\infty, \quad \lim_{x\to2+0} \ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right| = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right| = 0.$$

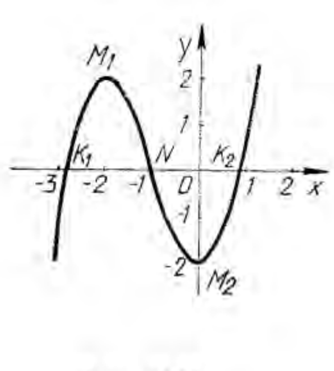


Рис. 10.16

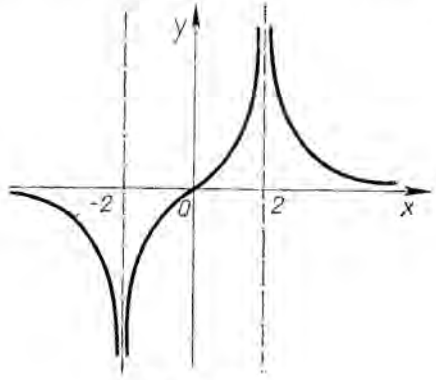


Рис. 10.17

3. Поскольку $f'(x) = \dfrac{-4}{x^2-4} < 0$ при $x < -2$ и $x > 2$, функция убывает в промежутках $(-\infty, -2)$ и $(2, +\infty)$; так как $f'(x) > 0$ при $-2 < x < 2$, функция возрастает в промежутке $(-2, 2)$.

4. Функция экстремумов не имеет, потому что нет критических точек: производная отлична от нуля при всех x, она обращается в бесконечность в точках $x = \pm 2$, где функция не определена.

5. Вторая производная

$$f''(x) = 8x/(x^2-4)^2$$

равна нулю при $x = 0$ и меняет знак при переходе через эту точку: $f''(x) < 0$ при $-2 < x < 0$; $f''(x) > 0$ при $0 < x < 2$. Следовательно, $x = 0$ — абсцисса точки перегиба. Эта точка совпадает с началом координат, так как ее ордината $y = f(0) = \ln\left|\dfrac{0+2}{0-2}\right| = 0$.

Поскольку $f''(x) < 0$ при $x < -2$, то график функции вогнут вниз в промежутке $(-\infty, -2)$; так как $f''(x) > 0$ при $x > 2$, то график функции вогнут вверх в промежутке $(2, +\infty)$.

6. График функции пересекает координатные оси в начале координат.

7. Поскольку

$$\lim_{x\to-2} \ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right| = -\infty, \quad \lim_{x\to2} \ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right| = +\infty,$$

то прямые $x = -2$, $x = 2$ являются асимптотами графика (рис. 10.17).

Ось Ox является горизонтальной асимптотой графика, так как

$$\lim_{x\to\infty} \ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right| = 0.$$

В задачах 10.144—10.183 исследовать функцию и построить ее график.

10.144. $f(x) = x^3 - 3x + 2$. **10.145.** $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$.

10.146. $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x - 1$.

10.147. $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 4$.

10.148. $f(x) = x^3 - 12x + 1$. **10.149.** $f(x) = x^3 - 6x + 5$.

10.150. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$. **10.151.** $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.

10.152. $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 1$. **10.153.** $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x - 8$.

10.154. $f(x) = x^3 + 4x^2 - 6$. **10.155.** $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 3$.

10.156. $f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$. **10.157.** $f(x) = 5x^2 - x^4 - 6$.

10.158. $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$. **10.159.** $f(x) = 13x^2 - x^4 - 36$.

10.160. $f(x) = x^5 - 5x + 3$. **10.161.** $f(x) = x^5 + 5x^4 + 5x^3$.

10.162. $f(x) = x^6 - 7{,}5x^4 + 12x^2 + 2$. **10.163.** $f(x) = x^6 - 6x^4 + 9x^2 - 10$.

10.164. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$. **10.165.** $f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 3}$.

10.166. $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4x + 3}$. **10.167.** $f(x) = \frac{x}{x^2 - 2x + 2}$.

10.168. $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$. **10.169.** $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$.

10.170. $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$. **10.171.** $f(x) = \frac{x^2+x}{x-1}$.

10.172. $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x^2+4x+3}$. **10.173.** $f(x) = \frac{x^2+5x-4}{x^2-6x+5}$.

10.174. $f(x) = \frac{1}{3}x\sqrt{x}$. **10.175.** $f(x) = x + \sqrt{4-x}$.

10.176. $f(x) = x^4/(x^3+1)$. **10.177.** $f(x) = x^3/(x^2+1)$.

10.178. $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x$. **10.179.** $f(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - x^4$.

10.180. $f(x) = x^5/(x^4+1)$. **10.181.** $f(x) = x^6/(x^5-1)$.

10.182. $f(x) = \ln\left|\frac{x-4}{x+4}\right|$. **10.183.** $f(x) = \ln\left|\frac{x+3}{x-3}\right|$.

В задачах 10.184—10.189 исследовать функцию, заданную неявным уравнением, и построить ее график.

10.184. $xy^2 - y^2 - 4x = 0$. **10.185.** $x^4 + y^4 = a^4$.

10.186. $x^2 + y^2 = x^2y^2$. **10.187.** $x^3 + xy^2 + x^2 - y^2 = 0$.

10.188. $xy^2 = (x-1)^2$. **10.189.** $x^3 + y^3 - x^2 = 0$.

В задачах 10.190—10.193 построить график функции, заданной параметрическими уравнениями.

10.190. $x = \frac{t^2}{t^2+1}$, $y = \frac{t^3}{t^2+1}$. **10.191.** $x = \frac{t^2}{t^2+1}$, $y = \frac{t(1-t^2)}{t^2+1}$.

10.192. $x = 4t^2$, $y = 3t(t^2+1)$. **10.193.** $x = \frac{t}{1-t^2}$, $y = \frac{t(1-2t^2)}{1-t^2}$.

В задачах 10.194—10.223 исследовать функцию и построить ее график.

10.194. $y = \sin x + \cos x$. **10.195.** $y = \sin 2x + \cos 3x$.

10.196. $y = e^{-x}\cos x$. **10.197.** $y = e^{-x}\sin x$.

10.198. $y = xe^x$. **10.199.** $y = e^{-x}x^2$. **10.200.** $y = e^{-x^2}$.

10.201. $y = 8x^2e^{-x^2}$. **10.202.** $y = e^{-1/x^2}$. **10.203.** $y = e^{-1/x}$.

10.204. $y = \mathrm{th}(1/x)$. **10.205.** $y = x\,\mathrm{th}(1/x)$.

10.206. $y = x\sin(1/x)$. **10.207.** $y = x^2\sin(1/x)$.

10.208. $y = \sin x^2$. **10.209.** $y = x\ln x$.

10.210. $y = \sin x/x$. **10.211.** $y = \sin(1/x)$.

10.212. $y = \ln\sin x$. **10.213.** $y = \ln\cos x$.

10.214. $y = (1+x)^{2/x}$. **10.215.** $y = x(1+3/x)^x$.

10.216. $y = \arcsin(2x/(1+x^2))$. **10.217.** $y = \arccos(1-x)/(1-2x)$.

10.218. $y = 2x + \mathrm{arctg}\,x$. **10.219.** $y = x/3 + \mathrm{arcctg}\,x$.

10.220. $y = x^x$. **10.221.** $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

10.222. $y = x^{1/x}$. **10.223.** $y = \sqrt{x^2+1}\ln(x + \sqrt{x^2+4})$.

10.6. Приложение теории экстремумов к решению задач

В математике, физике, химии, технике часто встречаются задачи о нахождении наибольшего или наименьшего значения некоторой величины при определенных условиях, которым эта величина должна удовлетворять.

Общая схема решения таких задач состоит в следующем. Устанавливается зависимость рассматриваемой величины y от некоторой независимой величины x (обозначения, разумеется, могут быть и другими). Из условия задачи, в частности, определяется тот промежуток, в котором может изменяться аргумент x. Когда величина y представлена как функция аргумента x, к ней применяется теория экстремумов.

Примеры. 1. Разложить число 100 на два слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим.

Обозначим одно из слагаемых через x, тогда второе будет равно $100 - x$. Произведение этих слагаемых выразится функцией

$$y = x(100 - x) = 100x - x^2.$$

Из условия задачи следует, что аргумент функции меняется в промежутке $(0, 100)$.

Чтобы решить задачу, найдем экстремум функции $y = 100x - x^2$. Поскольку $y' = 100 - 2x$, $y' = 0$ при $x = 50$, $y'' = -2$ при всех x, то $x = 50$ — точка максимума данной функции. Первое слагаемое равно 50, второе также равно 50.

Следовательно, произведение слагаемых будет наибольшим, когда они равны между собой.

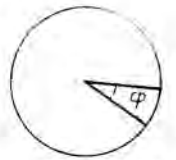


Рис. 10.18

2. Какой сектор следует вырезать из круга радиусом $R = 1$, чтобы из оставшейся его части можно было сделать конусообразный фильтр с наибольшим объемом?

Обозначим центральный угол сектора, из которого нужно сделать фильтр, через φ (рис. 10.18), а радиус окружности основания конуса через r, тогда $\varphi = 2\pi r$, $r = \varphi/(2\pi)$.

Объем конуса определяется формулой

$$V = \pi r^2 h/3,$$

где h — высота.

Так как

$$h = \sqrt{1-r^2} = \sqrt{1-\frac{\varphi^2}{4\pi^2}},$$

то получаем функцию

$$V = \frac{1}{12\pi}\varphi^2\sqrt{1-\frac{\varphi^2}{4\pi^2}},$$

аргумент которой меняется в промежутке $(0, 2\pi)$.

Задача сводится к нахождению экстремальных значений функции V. Находим производные функции V:

$$V' = \frac{1}{12\pi}\left(2\varphi\sqrt{1-\frac{\varphi^2}{4\pi^2}} - \frac{\varphi^2}{4\pi^2\sqrt{1-\frac{\varphi^2}{4\pi^2}}}\right),$$

$$V'' = \frac{1}{12\pi^3}\,\frac{2\pi^2-\frac{9}{4}\varphi^2+\frac{3}{8}\frac{\varphi^4}{\pi^2}}{\left(1-\frac{\varphi^2}{4\pi^2}\right)^{3/2}}.$$

Приравнивая нулю первую производную, получаем уравнение

$$2\varphi\sqrt{1-\frac{\varphi^2}{4\pi^2}} - \frac{\varphi^3}{4\pi^2\sqrt{1-\frac{\varphi^2}{4\pi^2}}} = 0 \text{ или } 2\varphi\left(1-\frac{\varphi^2}{4\pi^2}\right) - \frac{\varphi^3}{4\pi^2} = 0,$$

корни которого $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = -\sqrt{\frac{8}{3}}\pi$, $\varphi_3 = \sqrt{\frac{8}{3}}\pi$. Следовательно, области определения функции принадлежит лишь корень φ_3.

Поскольку

$$V''(\varphi_3) = \frac{1}{12\pi^3}\,\frac{-4\pi^2+\frac{8}{3}\pi^2}{(1/3)^{3/2}} < 0,$$

то в точке φ_3 функция имеет максимум.

Выразив искомую дугу x в градусах, получим приближенное значение $x \approx 294°$. Следовательно, вырезать нужно сектор с центральным углом, приближенно равным 66°.

3. Газовая смесь состоит из окиси азота и кислорода. Найти концентрацию кислорода, при которой содержащаяся в смеси окись азота окисляется с максимальной скоростью.

В условиях практической необратимости скорость реакции $2NO + O_2 = 2NO_2$ выражается формулой $v = cx^2y$, где x — концентрация NO в любой момент времени; y — концентрация O_2; c — константа скорости реакции, не зависящая от концентрации реагирующих компонентов и зависящая только от температуры ($c > 0$).

Выражая концентрации газов в объемных процентах, получаем:

$$y = 100 - x,\quad v = cx^2(100-x) = c(100x^2 - x^3).$$

Исследуем на экстремум функцию $v = v(x)$. Находим производные:

$$v'(x) = c(200x - 3x^2),\quad v''(x) = c(200 - 6x).$$

Приравнивая нулю первую производную, получаем уравнение

$$c(200x - 3x^2) = 0,$$

из которого находим критические точки $x_1 = 0$, $x_2 = 200/3$.

Поскольку $v''(0) > 0$, $v''(200/3) < 0$, то $x_1 = 0$ — точка минимума, $x_2 = 200/3$ — точка максимума.

Таким образом, при $x = x_2 = 66{,}7$ % $y = 100 - x = 33{,}3$ % или при $y/x = 0{,}5$ скорость окисления принимает максимальное значение.

10.224. В треугольник с основанием $a = 20$ и высотой $h = 12$ вписан прямоугольник наибольшей площади. Вычислить его площадь.

10.225. Боковые стороны и меньшее основание трапеции равны a. Определить ее большее основание b так, чтобы площадь трапеции была наибольшей.

10.226. Найти наибольшее значение произведения двух положительных чисел, сумма которых постоянна и равна a.

10.227. Найти наименьшее значение суммы двух положительных чисел, произведение которых постоянно и равно b.

10.228. Из всех прямоугольников данной площади S найти тот, периметр которого наименьший.

10.229. Найти прямоугольный треугольник наибольшей площади, если сумма его катета и гипотенузы постоянна.

10.230. Найти кратчайшее и наибольшее расстояния от точки $B(0, 3)$ до окружности $x^2 + y^2 = 4$.

10.231. В конус, радиус основания которого равен R, а высота H, вписать цилиндр наибольшего объема.

10.232. В шар радиусом R вписать цилиндр с наибольшей полной поверхностью.

10.233. Около данного шара описать конус наименьшего объема.

10.234. В шар радиусом R вписать цилиндр наибольшего объема.

10.235. Найти наибольший объем конуса с данной образующей l.

10.236. Газ, содержащий окись азота, смешивается с воздухом. Определить, при каком содержании кислорода (в %) в полученной смеси скорость окисления азота максимальна и какой объем добавляемого к газу воздуха обеспечивает это количество кислорода в смеси.

10.237. Процессы сульфирования и хлорирования органических соединений часто осуществляются с применением света. Найти, на какой высоте над площадкой следует поместить источник света, чтобы освещенность площадки была максимальной.

10.238. В расчетной практике по абсорбции, дистилляции, экстракции и выщелачиванию встречается функция $f(x) = \frac{x^{n+1} - x}{x^{n+1} - 1}$. Найти предел этой функции при $x \to 1$.

10.239. Зависимость между количеством x вещества, получаемого в результате некоторой химической реакции, и временем t выражается уравнением $x = a(1 - e^{-kt})$. Определить скорость реакции.

V. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

11. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Первообразной функцией для функции $f(x)$ называется такая функция $F(x)$, производная которой равна данной функции, т. е.

$$F'(x)=f(x).$$

Неопределенным интегралом от непрерывной функции $f(x)$ или от дифференциального выражения $f(x)dx$ называется совокупность всех первообразных функций $f(x)$:

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C,$$

где $F'(x)=f(x)$. Функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, а $f(x)dx$ — *подынтегральным выражением.*

Свойства неопределенного интеграла:

1) производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции; дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$\left(\int f(x)\,dx\right)'=f(x),\quad d\int f(x)\,dx=f(x)\,dx;$$

2) неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int d\varphi(x)=\varphi(x)+C,\quad \int dx=x+C;$$

3) постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$$\int cf(x)\,dx=c\int f(x)\,dx\quad (c=\text{const});$$

4) неопределенный интеграл от алгебраической суммы непрерывных функций равен соответствующей алгебраической сумме неопределенных интегралов от слагаемых:

$$\int [f_1(x)-f_2(x)+f_3(x)]dx=\int f_1(x)\,dx-\int f_2(x)\,dx+\int f_3(x)\,dx.$$

11.1. Непосредственное интегрирование

В дальнейшем будем пользоваться следующей таблицей основных неопределенных интегралов:

$$\int x^\alpha dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\quad(\alpha\neq-1), \tag{11.1}$$

$$\int 1\cdot dx=\int dx=x+C,$$

$$\int\frac{1}{x}\,dx=\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C, \tag{11.2}$$

$$\int e^x dx=e^x+C,$$

$$\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C,$$

$$\int\cos x\,dx=\sin x+C,$$

$$\int\sin x\,dx=-\cos x+C,$$

$$\int\frac{1}{\cos^2 x}\,dx=\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg}x+C,$$

$$\int\frac{1}{\sin^2 x}\,dx=\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg}x+C,$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C=-\arccos x+C_1,$$

$$\int\frac{1}{1+x^2}\,dx=\int\frac{1}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x+C=-\operatorname{arcctg}x+C_1,$$

$$\int\frac{1}{x^2-1}\,dx=\int\frac{dx}{x^2-1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C. \tag{11.3}$$

Метод непосредственного интегрирования основан на свойстве 4 неопределенного интеграла. Если $f(x)=f_1(x)-f_2(x)+f_3(x)$, то

$$\int (f_1(x)-f_2(x)+f_3(x))dx=\int f_1(x)dx-\int f_2(x)dx+\int f_3(x)dx.$$

Примеры. 1. Найти неопределенный интеграл $\int\frac{3x^4-2x^3+5x^2-7x+8}{x^2}dx$.

Разделив почленно числитель на знаменатель, использовав свойства 3 и 4 неопределенного интеграла, по формулам (11.1) и (11.2) находим

$$\int\frac{3x^4-2x^3+5x^2-7x+8}{x^2}dx=\int\left(3x^2-2x+5-\frac{7}{x}+\frac{8}{x^2}\right)dx=$$

$$=3\int x^2dx-2\int xdx+5\int dx-7\int\frac{dx}{x}+8\int\frac{dx}{x^2}=$$

$$=3\cdot\frac{x^3}{3}-2\cdot\frac{x^2}{2}+5x-7\ln x+8\frac{x^{-2+1}}{-2+1}+C=$$

$$=x^3-x^2+5x-7\ln x-\frac{8}{x}+C.$$

2. Найти $\int(1-\sqrt{x})^3dx$.

Раскрывая скобки и применяя формулу (11.1), получаем

$$\int(1-\sqrt{x})^3dx=\int(1-3\sqrt{x}+3x-\sqrt{x^3})\,dx=$$

$$=\int dx-3\int\sqrt{x}\,dx+3\int xdx-\int\sqrt{x^3}\,dx=\int dx-3\int x^{1/2}dx+$$

$$+3\int xdx-\int x^{3/2}dx=x-3\frac{x^{3/2}}{3/2}+3\frac{x^2}{2}-\frac{x^{5/2}}{5/2}+C=x-$$

$$-2x\sqrt{x}+\frac{3}{2}x^2-\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+C.$$

3. Найти $\int\cos^2\frac{x}{2}dx$.

Поскольку $\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2}$, то

$$\int\cos^2\frac{x}{2}dx=\int\frac{1+\cos x}{2}dx=\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int\cos x\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\sin x+C.$$

В задачах 11.1—11.20 найти неопределенный интеграл.

11.1. $\int \frac{6x^4-8x^3-4x^2+3x-5}{x^2}\,dx.$

11.2. $\int \frac{9x^5+12x^4-6x^3+7x^2-4x+2}{x^3}\,dx.$

11.3. $\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^4}+\frac{5}{x^6}\right)dx.$ **11.4.** $\int\left(\frac{2}{x^3}-\frac{4}{x^5}+\frac{6}{x^7}\right)dx.$

11.5. $\int\left(\sqrt{x}-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)dx.$ **11.6.** $\int\left(\sqrt{x^5}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx.$

11.7. $\int(2+\sqrt{x})^3\,dx.$ **11.8.** $\int\frac{(1-\sqrt{x})^3}{x}\,dx.$

11.9. $\int 2^x\left(1+\frac{2^{-x}}{\sqrt[4]{x^3}}\right)dx.$ **11.10.** $\int e^x\left(5-\frac{3e^{-x}}{x^4}\right)dx.$

11.11. $\int\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)^2dx.$ **11.12.** $\int\sin^2\frac{x}{2}\,dx.$

11.13. $\int\frac{5-4\sin^3 x}{\sin^2 x}\,dx.$ **11.14.** $\int\frac{7+3\cos^3 x}{\cos^2 x}\,dx.$

11.15. $\int\left(\frac{3}{1+x^2}-\frac{7}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx.$ **11.16.** $\int\left(\frac{4}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{9}{1+x^2}\right)dx.$

11.17. $\int\frac{x^2}{x^2-1}\,dx.$ **11.18.** $\int\frac{x^4}{x^2-1}\,dx.$

11.19. $\int\frac{x^2}{x^2+1}\,dx.$ **11.20.** $\int\frac{x^4}{x^2+1}\,dx.$

11.2. Метод подстановки

В основе интегрирования путем введения новой переменной (метод подстановки) лежит формула

$$\int f(x)\,dx=\int f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,du,$$

где $x=\varphi(u)$ — дифференцируемая функция от u.

Если $F(x)=\int f(x)\,dx$, где $F'(x)=f(x)$, то

$$F(u)=\int f(u)\,du,$$

где $u=u(x)$ — любая дифференцируемая функция от x. Последняя формула дает возможность значительно расширить таблицу простейших неопределенных интегралов, заменив x на u в каждой из формул этой таблицы, например $\int\cos u\,du=\sin u+C$, $\int e^u du=e^u+C$ и т. д.

Примеры. 1. Найти $\int\sin(3-8x)\,dx$.

Введем новую переменную по формуле $3-8x=u$, откуда $-8dx=du$ или $dx=-du/8$. Подставляя полученные выражения в подынтегральное выражение, находим

$$\int\sin(3-8x)\,dx=\int\sin u\left(-\frac{du}{8}\right)=-\frac{1}{8}\int\sin u\,du=\frac{1}{8}\cos u+C.$$

Снова переходя к переменной x, получаем

$$\int\sin(3-8x)\,dx=\frac{1}{8}\cos u+C=\frac{1}{8}\cos(3-8x)+C.$$

Замечание. Здесь принято во внимание, что $\int\sin u\,du=-\cos u+C$.

2. Найти $\int\frac{dx}{x\sqrt{3x+1}}$.

Чтобы избавиться от иррациональности, положим $\sqrt{3x+1}=u$, откуда $3x+1=u^2$, $x=\frac{u^2-1}{3}$, $dx=\frac{2}{3}u\,du$. По формуле (11.3) находим

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{3x+1}}=\int\frac{\frac{2}{3}u\,du}{\frac{u^2-1}{3}u}=2\int\frac{du}{u^2-1}=\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+C.$$

Переходя к переменной x, получаем

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{3x+1}}=\ln\left|\frac{\sqrt{3x+1}-1}{\sqrt{3x+1}+1}\right|+C.$$

3. Найти $\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\,dx$.

В случае, когда подынтегральное выражение содержит $\sqrt{a^2-x^2}$, целесообразно использовать тригонометрическую подстановку $x=a\sin u$ или $x=a\cos u$.

Применим подстановку $x=a\sin u$, откуда $dx=a\cos u\,du$, поэтому

$$\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\,dx=\int\frac{\sqrt{a^2-a^2\sin^2 u}}{a^2\sin^2 u}\,a\cos u\,du=\int\frac{\cos^2 u}{\sin^2 u}\,du.$$

Последний интеграл сводится к табличным интегралам:

$$\int\frac{\cos^2 u}{\sin^2 u}\,du=\int\frac{1-\sin^2 u}{\sin^2 u}\,du=\int\frac{du}{\sin^2 u}-\int du=-\operatorname{ctg}u-u+C.$$

Заметив, что

$$\sin u=\frac{x}{a},\quad u=\arcsin\frac{x}{a},\quad \operatorname{ctg}u=\frac{\cos u}{\sin u}=\frac{\sqrt{1-\sin^2 u}}{\sin u}=$$

$$=\frac{\sqrt{1-x^2/a^2}}{x/a}=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x},$$

окончательно получим

$$\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\,dx=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}-\arcsin\frac{x}{a}+C.$$

4. Найти $\int\frac{x^2}{(1+x)^8}\,dx$.

Преобразуя подынтегральную функцию, получаем

$$\int\frac{x^2}{(1+x)^8}\,dx=\int\frac{(x^2+2x+1)-2x-1}{(1+x)^8}\,dx=\int\frac{(1+x)^2-2x-2+1}{(1+x)^8}\,dx=$$

$$=\int\frac{(1+x)^2-2(1+x)+1}{(1+x)^8}\,dx=\int\frac{dx}{(1+x)^6}-2\int\frac{dx}{(1+x)^7}+\int\frac{dx}{(1+x)^8}=$$

$$=\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^6}-2\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^7}+\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^8}=$$

$$=\int(x+1)^{-6}d(x+1)-2\int(x+1)^{-7}d(x+1)+\int(x+1)^{-8}d(x+1)=$$

$$=\frac{(x+1)^{-5}}{-5}-2\frac{(x+1)^{-6}}{-6}+\frac{(x+1)^{-7}}{-7}+C=-\frac{1}{5(x+1)^5}+$$

$$+\frac{1}{3(x+1)^6}-\frac{1}{7(x+1)^7}+C.$$

Замечание. Здесь применены формулы:

$$dx = d(x+1), \quad \int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha}+1}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1).$$

В задачах 11.21—11.62 найти интеграл, применив метод подстановки.

11.21. $\int \sin(2x+7)\,dx$. **11.22.** $\int \cos(4-5x)\,dx$. **11.23.** $\int x\cos x^2\,dx$.

11.24. $\int x^2 \sin x^3\,dx$. **11.25.** $\int x\sqrt{x-4}\,dx$. **11.26.** $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+13}}$.

11.27. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$. **11.28.** $\int \frac{dx}{7-8x}$. **11.29.** $\int e^{x^3}x^2dx$.

11.30. $\int \frac{x}{\sqrt{4x+9}}\,dx$. **11.31.** $\int \frac{x^2}{(1+x)^4}\,dx$. **11.32.** $\int \frac{x^2}{(1+x)^5}\,dx$.

11.33. $\int e^{\cos 2x}\sin 2x\,dx$. **11.34.** $\int \sqrt{1+3\cos x}\,\sin x\,dx$.

11.35. $\int \sin^4 x\cos x\,dx$. **11.36.** $\int \cos^5 x\sin x\,dx$.

11.37. $\int x\sqrt{x^2+5}\,dx$. **11.38.** $\int x^2\sqrt{x^3-7}\,dx$.

11.39. $\int \frac{\sin x}{\cos^4 x}\,dx$. **11.40.** $\int \frac{\cos x}{\sin^5 x}\,dx$. **11.41.** $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^2 x}\,dx$.

11.42. $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^2 x}\,dx$. **11.43.** $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$. **11.44.** $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

11.45. $\int (x-3)\sqrt{x-4}\,dx$. **11.46.** $\int x^2(\sqrt{1-x^2})^3dx$.

11.47. $\int \sqrt{8-2x^2}\,dx$. **11.48.** $\int x^2\sqrt{27-3x^2}\,dx$.

11.49. $\int x^4\sqrt{64-4x^2}\,dx$. **11.50.** $\int x^2(\sqrt{27-3x^2})^3dx$.

11.51. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$. **11.52.** $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}}$. **11.53.** $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

11.54. $\int \frac{\ln^3 x}{x}\,dx$. **11.55.** $\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x}\,dx$. **11.56.** $\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,dx$.

11.57. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$. **11.58.** $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^3}}\,dx$.

11.59. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$. **11.60.** $\int x\sqrt{125-5x^2}\,dx$.

11.61. $\int (\sqrt{64-4x^2})^3dx$. **11.62.** $\int (\sqrt{8-2x^2})^5dx$.

11.63. Показать, что $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$.

11.64. Показать, что $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \ln|x+\sqrt{x^2+\alpha}| + C$.

11.3. Интегрирование по частям

Интегрирование по частям выполняется по формуле

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du, \tag{11.4}$$

полученной из равенства $d(uv) = u\,dv + v\,du$.

Примеры. 1. Найти интеграл $\int x\cos 3x\,dx$.

Положим $x = u$, $\cos 3x\,dx = dv$. Из первого равенства путем дифференцирования получаем $du = dx$, а из второго с помощью интегрирования определяем функцию $v = \frac{1}{3}\sin 3x$. По формуле (11.4) получаем

$$\int x\cos 3x\,dx = x\cdot\frac{1}{3}\sin 3x - \int \frac{1}{3}\sin 3x\,dx = \frac{x}{3}\sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x + C.$$

2. Найти интеграл $\int x^2\sin 2x\,dx$.

Полагая $x^2 = u$, $\sin 2x\,dx = dv$, находим $du = 2x\,dx$, $v = -\frac{1}{2}\cos 2x$. По формуле (11.4) получаем

$$\int x^2\sin 2x\,dx = x^2\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) - \int\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)2x\,dx = -\frac{1}{2}x^2\cos 2x + \int x\cos 2x\,dx.$$

Применяя еще раз формулу (11.4), не выписывая явно u и dv, находим

$$\int x\cos 2x\,dx = \int x\,\frac{1}{2}\,d(\sin 2x) = \frac{1}{2}x\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x\,dx = \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C.$$

Следовательно,

$$\int x^2\sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}x^2\cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C.$$

В задачах 11.65—11.94 найти интеграл методом интегрирования по частям.

11.65. $\int x\sin 5x\,dx$. **11.66.** $\int xe^{-2x}\,dx$. **11.67.** $\int (x+7)\,e^x dx$.

11.68. $\int \ln(2-x)\,dx$. **11.69.** $\int x\ln 6x\,dx$. **11.70.** $\int \arcsin\frac{x}{3}\,dx$.

11.71. $\int x\operatorname{arctg} 4x\,dx$. **11.72.** $\int x^3e^{x^2}dx$. **11.73.** $\int x^5e^{-x^3}dx$.

11.74. $\int \frac{x\sin x}{\cos^3 x}\,dx$. **11.75.** $\int (x^2-2x+3)\sin x\,dx$.

11.76. $\int (x^2+4x-5)\cos x\,dx$. **11.77.** $\int x^2\operatorname{arctg} x\,dx$.

11.78. $\int x^2\sin x\,dx$. **11.79.** $\int x^2\cos 3x\,dx$.

11.80. $\int x^3\cos x\,dx$. **11.81.** $\int \cos\sqrt{x}\,dx$. **11.82.** $\int x\cos\sqrt{x}\,dx$.

11.83. $\int (\arccos x)^2dx$. **11.84.** $\int x^3\sin x^2dx$. **11.85.** $\int x^2(\ln x)^2dx$.

11.86. $\int x\cos^2 x\,dx$. **11.87.** $\int \frac{\arccos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$.

11.88. $\int \arccos\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,dx$. **11.89.** $\int \operatorname{arcctg}\sqrt{x}\,dx$.

11.90. $\int \frac{x\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. **11.91.** $\int x\operatorname{arcctg}\sqrt{x^2-1}\,dx$.

11.92. $\int x\operatorname{arcctg}\sqrt{x}\,dx$. **11.93.** $\int e^x\sin^2\frac{x}{2}\,dx$. **11.94.** $\int x(\operatorname{arcctg}x)^2dx$.

11.95. Показать, что

$$\int\sqrt{x^2+\alpha}\,dx=\frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+\alpha}+\alpha\ln|x+\sqrt{x^2+\alpha}|\right]+C.$$

11.4. Интегрирование некоторых функций, содержащих квадратный трехчлен

Интеграл

$$\int\frac{dx}{Ax^2+Bx+C}$$

сводится к одному из следующих интегралов:

$$\int\frac{du}{u^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a}+C, \qquad (11.5)$$

$$\int\frac{du}{u^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|+C. \qquad (11.6)$$

Интеграл

$$\int\frac{Dx+E}{Ax^2+Bx+C}\,dx$$

можно привести к интегралу (11.5) или (11.6) и к интегралу

$$\int\frac{u\,du}{u^2+\alpha}=\frac{1}{2}\ln|u^2+\alpha|+C.$$

Интеграл

$$\int\frac{dx}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}}$$

сводится к одному из интегралов:

$$\int\frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}=\arcsin\frac{u}{a}+C,$$

$$\int\frac{du}{\sqrt{u^2+\alpha}}=\ln|u+\sqrt{u^2+\alpha}|+C. \qquad (11.7)$$

Интеграл

$$\int\sqrt{Ax^2+Bx+C}\,dx$$

приводится к одному из следующих интегралов:

$$\int\sqrt{u^2+\alpha}\,du=\frac{u}{2}\sqrt{u^2+\alpha}+\frac{\alpha}{2}\ln|u+\sqrt{u^2+\alpha}|+C,$$

$$\int\sqrt{a^2-u^2}\,du=\frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{u}{a}+C. \qquad (11.8)$$

Примеры. 1. Найти $\int\frac{dx}{4x^2+8x+13}$.

Вынося за скобки коэффициент при x^2 и выделяя полный квадрат в знаменателе, по формуле (11.5) получаем

$$\int\frac{dx}{4x^2+8x+13}=\int\frac{dx}{4[(x^2+2x+1)-1+13/4]}=\frac{1}{4}\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+(3/2)^2}=$$
$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3/2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3/2}+C=\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{2(x+1)}{3}+C.$$

2. Найти $\int\frac{dx}{9x^2-18x-16}$.

Преобразуя знаменатель, по формуле (11.6) находим

$$\int\frac{dx}{9x^2-18x-16}=\int\frac{dx}{9[(x^2-2x+1)-1-16/9]}=$$
$$=\frac{1}{9}\int\frac{d(x-1)}{(x-1)^2-(5/3)^2}=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2\cdot5/3}\ln\left|\frac{(x-1)-5/3}{(x-1)+5/3}\right|+$$
$$+C=\frac{1}{30}\ln\left|\frac{3x-8}{3x+2}\right|+C.$$

3. Найти $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+8}}$.

Преобразуя подкоренное выражение, по формуле (11.7) находим

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+8}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2+6x+9)-9+8}}=\int\frac{d(x+3)}{\sqrt{(x+3)^2-1}}=$$
$$=\ln|x+3+\sqrt{(x+3)^2-1}|+C=$$
$$=\ln|x+3+\sqrt{x^2+6x+8}|+C.$$

4. Найти $\int\sqrt{12+4x-x^2}\,dx$.

Преобразуя подкоренное выражение, по формуле (11.8) находим

$$\int\sqrt{12+4x-x^2}\,dx=\int\sqrt{-[(x^2-4x+4)-4-12]}\,dx=$$
$$=\int\sqrt{16-(x-2)^2}\,d(x-2)=\frac{x-2}{2}\sqrt{16-(x-2)^2}+$$
$$+\frac{16}{2}\arcsin\frac{x-2}{4}+C=\frac{x-2}{2}\sqrt{12+4x-x^2}+$$
$$+8\arcsin\frac{x-2}{4}+C.$$

В задачах 11.96—11.135 найти интеграл.

11.96. $\int\frac{dx}{x^2+64}$. **11.97.** $\int\frac{dx}{4x^2+13}$. **11.98.** $\int\frac{dx}{x^2-81}$.

11.99. $\int\frac{dx}{5x^2-18}$. **11.100.** $\int\frac{dx}{x^2-10x+41}$. **11.101.** $\int\frac{dx}{x^2+12x+50}$.

11.102. $\int\frac{dx}{2x^2-4x+3}$. **11.103.** $\int\frac{dx}{3x^2+6x+5}$. **11.104.** $\int\frac{dx}{x^2+4x-8}$.

11.105. $\int\frac{dx}{x^2-2x-4}$. **11.106.** $\int\frac{dx}{4x^2+8x-3}$. **11.107.** $\int\frac{dx}{3x^2-12x-14}$.

11.108. $\int \frac{dx}{x^2+x+3}$. **11.109.** $\int \frac{dx}{x^2-x-2}$.

11.110. $\int \frac{x+2}{x^2+4x-7}\,dx$. **11.111.** $\int \frac{6x+5}{3x^2+5x-9}\,dx$.

11.112. $\int \frac{x+3}{x^2+2x+5}\,dx$. **11.113.** $\int \frac{x-3}{2x^2-8x+1}\,dx$.

11.114. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x-5}}$. **11.115.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+16x+5}}$. **11.116.** $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+6x+4}}$.

11.117. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-4x+5}}$. **11.118.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x}}$. **11.119.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5x}}$.

11.120. $\int \frac{dx}{\sqrt{12+4x-x^2}}$. **11.121.** $\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$. **11.122.** $\int \frac{dx}{\sqrt{7+4x-2x^2}}$.

11.123. $\int \frac{dx}{\sqrt{10-6x-3x^2}}$. **11.124.** $\int \sqrt{x^2+4x+13}\,dx$.

11.125. $\int \sqrt{5+4x-x^2}\,dx$. **11.126.** $\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2+x+1}}$.

11.127. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-x+2}}$. **11.128.** $\int \frac{x+4}{x^2+6x}\,dx$.

11.129. $\int \frac{x-5}{x^2-4x}\,dx$. **11.130.** $\int \frac{x+2}{x^2+2x-3}\,dx$.

11.131. $\int \frac{(x+3)\,dx}{x^2+8x+25}$. **11.132.** $\int \frac{(x+1)\,dx}{x^2+x+3}$. **11.133.** $\int \frac{(x-6)\,dx}{\sqrt{x^2+8x+17}}$.

11.134. $\int \frac{(x-3)\,dx}{\sqrt{x^2-2x-9}}$. **11.135.** $\int \frac{(x+7)\,dx}{\sqrt{x^2+4x-12}}$.

11.5. Интегрирование рациональных функций

Неопределенный интеграл от целой рациональной функции (многочлена) находится непосредственно:

$$\int (a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n)\,dx = a_0\int dx + a_1\int x\,dx + a_2\int x^2dx + \ldots + a_n\int x^ndx =$$

$$= a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\frac{a_2}{3}x^3+\ldots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+C.$$

При нахождении интегралов от дробных рациональных функций, т. е. функций вида

$$R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_mx^m},$$

предварительно выделяют целую часть путем деления, а остаток — правильную рациональную дробь $S(x)=\frac{N_k(x)}{Q_m(x)}$ $(k<n)$ — представляют в виде суммы элементарных дробей:

$$\frac{A}{(x-a)^{\alpha}},\qquad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^{\beta}},$$

где a, p, q, A, B, C — действительные числа и $p^2/4-q<0$ (квадратный трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней); α, β — натуральные числа.

Знаменатель остатка (многочлен $Q_m(x)$) разлагают на множители вида $(x-a)^{\mu}$, $(x^2+px+q)^{\nu}$, а сам остаток в соответствии с полученным разложением — на сумму элементарных дробей следующим образом:

$$S(x)=\frac{N_k(x)}{Q_m(x)}=\frac{N_k(x)}{(x-a)^{\mu}\cdots(x^2+px+q)^{\nu}}=$$

$$=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_{\mu}}{(x-a)^{\mu}}+\ldots+\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}+$$

$$+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{B_{\nu}x+C_{\nu}}{(x^2+px+q)^{\nu}}. \qquad (11.9)$$

Замечание. Каждому линейному множителю кратности μ, т. е. множителю $(x-a)^{\mu}$, соответствует в разложении сумма μ элементарных дробей вида $A_i/(x-a)^i$ $(i=1, 2, \ldots, \mu)$, а каждому квадратному множителю кратности ν, т. е. множителю $(x^2+px+q)^{\nu}$, — сумма ν элементарных дробей вида $(B_j+C_j)/(x^2+px+q)^j$ $(j=1, 2, \ldots, \nu)$. В последнем случае числители дробей являются не постоянными (A_i), а линейными функциями от x (B_jx+C_j).

Значения A_i, B_j, C_j находятся методом неопределенных коэффициентов. Покажем это на примерах.

Примеры. 1. Найти интеграл $\int \frac{x^5-x+1}{x^3+x}\,dx$.

Подынтегральная функция является рациональной, т. е. отношением двух многочленов. Поскольку степень числителя дроби выше степени знаменателя, можно выделить целую часть функции. В результате деления числителя на знаменатель получаем

$$\frac{x^5-x+1}{x^3+x}=x^2-1+\frac{1}{x^3+x}. \qquad (1)$$

Интегралы от первых двух слагаемых находятся непосредственно. Чтобы найти интеграл от остатка, т. е. от третьего слагаемого, представим его в виде суммы элементарных дробей. Разложим сначала знаменатель остатка на множители. Так как $x^3+x=x(x^2+1)$ и x^2+1 на линейные множители не разлагается, то знаменатель представляет собой произведение двух простых множителей, один из которых линейный, другой квадратный.

В соответствии с общей формулой (11.9) разложение на элементарные дроби должно иметь вид

$$\frac{1}{x^3+x}=\frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}, \qquad (2)$$

где коэффициенты A, B, C пока не определены. Приводя правую часть формулы (2) к общему знаменателю, находим

$$\frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{A(x^2+1)+(Bx+C)x}{x(x^2+1)}=\frac{(A+B)x^2+Cx+A}{x(x^2+1)}$$

или $1=(A+B)x^2+Cx+A$. Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем уравнения: $A+B=0$, $C=0$, $A=1$, откуда $A=1$, $B=-1$, $C=0$.

Таким образом, разложение (2) принимает вид

$$\frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1},$$

поэтому

$$\int\frac{dx}{x^3+x}=\int\frac{dx}{x(x^2+1)}=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\right)dx=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{x\,dx}{x^2+1}=$$

$$=\int\frac{dx}{x}-\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)=\ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right|+C_1.$$

Принимая во внимание полученный результат и формулу (1), находим искомый интеграл:

$$\int \frac{x^5 - x + 1}{x^3 + x}\, dx = \int \left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^3 + x} \right) dx = \frac{x^3}{3} - x + \ln \left| \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right| + C.$$

2. **Найти интеграл** $\int \frac{x^3 + 5x^2 - 13x - 9}{x^4 - 10x^2 + 9}\, dx.$

Поскольку

$$x^4 - 10x^2 + 9 = (x^2 - 1)(x^2 - 9) = (x-1)(x+1)(x-3)(x+3),$$

то

$$\frac{x^3 + 5x^2 - 13x - 9}{x^4 - 10x^2 + 9} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+3} + \frac{D}{x-3} =$$

$$= \frac{A(x+1)(x^2-9) + B(x-1)(x^2-9) + C(x-3)(x^2-1) + D(x+3)(x^2-1)}{(x-1)(x+1)(x+3)(x-3)} =$$

$$= \frac{x^3(A+B+C+D) + x^2(A - B - 3C + 3D) - x(9A + 9B + C + D)}{x^4 - 10x^2 + 9} +$$

$$+ \frac{(9B - 9A + 3C - 3D)}{x^4 - 10x^2 + 9}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему уравнений:

$$A + B + C + D = 1,$$
$$A - B - 3C + 3D = 5,$$
$$9A + 9B + C + D = 13,$$
$$9B - 9A + 3C - 3D = -9,$$

решение которой: $A = 1$, $B = 1/2$, $C = -1$, $D = 1/2$.

Разложение данной дроби на элементарные имеет вид

$$\frac{x^3 + 5x^2 - 13x - 9}{x^4 - 10x^2 + 9} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{x-3},$$

поэтому

$$\int \frac{x^3 + 5x^2 - 13x - 9}{x^4 - 10x^2 + 9}\, dx = \int \frac{d(x-1)}{x-1} + \frac{1}{2}\int \frac{d(x+1)}{x+1} - \int \frac{d(x+3)}{x+3} +$$

$$+ \frac{1}{2}\int \frac{d(x-3)}{x-3} = \ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| - \ln|x+3| + \frac{1}{2}\ln|x-3| +$$

$$+ C = \ln \left| \frac{(x-1)\sqrt{(x+1)(x-3)}}{x+3} \right| + C.$$

3. **Найти интеграл** $\int \frac{x^2 + x + 2}{x^3 - x^2 - x - 2}\, dx.$

Так как

$$x^3 - x^2 - x - 2 = (x-2)(x^2 + x + 1),$$

то

$$\frac{x^2 + x + 2}{x^3 - x^2 - x - 2} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1} = \frac{A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x-2)}{(x-2)(x^2 + x + 1)}.$$

Приводя подобные члены, находим

$$\frac{x^2 + x + 2}{x^3 - x^2 - x - 2} = \frac{(A + B)x^2 + (A + C - 2B)x + (A - 2C)}{x^3 - x^2 - x - 2}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему уравнений:

$$A + B = 1,\ A + C - 2B = 1,\ A - 2C = 2,$$

из которой находим, что $A = 8/7$, $B = -1/7$, $C = -3/7$.

Следовательно,

$$\int \frac{x^2 + x + 2}{x^3 - x^2 - x - 2}\, dx = \frac{8}{7}\int \frac{dx}{x-2} - \frac{1}{7}\int \frac{x+3}{x^2 + x + 1}\, dx =$$

$$= \frac{8}{7}\int \frac{d(x-2)}{x-2} - \frac{1}{7}\int \frac{x + 1/2}{x^2 + x + 1}\, d\left(x + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{7}\int \frac{5/2}{x^2 + x + 1}\, dx =$$

$$= \frac{8}{7}\ln|x-2| - \frac{1}{14}\ln|x^2 + x + 1| - \frac{5\sqrt{3}}{3}\,\operatorname{arctg}\frac{(2x+1)\sqrt{3}}{3} + C.$$

В задачах 11.136—11.161 найти интеграл от рациональной функции.

11.136. $\int \frac{x^2 + 3x + 5}{x + 4}\, dx.$ **11.137.** $\int \frac{x^2 + 7}{x - 3}\, dx.$ **11.138.** $\int \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 5}\, dx.$

11.139. $\int \frac{x^2 - 2}{x + 6}\, dx.$ **11.140.** $\int \frac{x^4 + 5}{x^2 + 1}\, dx.$ **11.141.** $\int \frac{x^3 + 2x + 1}{x^2 - 1}\, dx.$

11.142. $\int \frac{dx}{x^3 + 1}.$ **11.143.** $\int \frac{x^5 - x^3 + x^2 - 7}{x^3 + 1}\, dx.$

11.144. $\int \frac{2x^2 + 5x + 9}{x^3 - 2x^2 - 13x - 10}\, dx.$ **11.145.** $\int \frac{x^2 + 6x - 11}{x^3 - 7x + 6}\, dx.$

11.146. $\int \frac{2x^2 - x - 16}{x^3 + 5x^2 + 2x - 8}\, dx.$ **11.147.** $\int \frac{x^2 - 8x - 2}{x^3 - 3x + 2}\, dx.$

11.148. $\int \frac{x^2 + 3}{x^3 + 7x^2 + 16x + 12}\, dx.$ **11.149.** $\int \frac{-x^2 - x + 16}{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}\, dx.$

11.150. $\int \frac{x^2 + x - 9}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}\, dx.$ **11.151.** $\int \frac{x^2 + 6x - 5}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}\, dx.$

11.152. $\int \frac{dx}{x^3 + 9x^2 + 27x + 27}.$ **11.153.** $\int \frac{dx}{x^3 + x^2 + x - 3}.$

11.154. $\int \frac{x - 8}{x^3 - x^2 + 2x + 4}\, dx.$ **11.155.** $\int \frac{x^2 - 4x - 3}{x^3 - x^2 - x - 2}\, dx.$

11.156. $\int \frac{x + 4}{x^3 + 2x^2 - 2x + 3}\, dx.$ **11.157.** $\int \frac{3x^2 - 1}{3x^4 - 10x^2 + 3}\, dx.$

11.158. $\int \frac{2x^3 - 3x^2 - 5x + 10}{x^4 - 5x^2 + 4}\, dx.$ **11.159.** $\int \frac{x^3 + 2x^2 - 5x + 2}{x^4 - 10x^2 + 9}\, dx.$

11.160. $\int \frac{x^3 + 9x^2 - 14x - 36}{x^4 - 13x^2 + 36}\, dx.$ **11.161.** $\int \frac{x^3 - 14x^2 - x + 44}{x^4 - 17x^2 + 16}\, dx.$

11.6. Интегрирование тригонометрических выражений

Интегралы вида:

$$\int \sin ax \cdot \sin bx\,dx,\quad \int \cos ax \cdot \cos bx\,dx,\quad \int \sin ax \cdot \cos bx\,dx$$

находят с помощью тригонометрических формул:

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)),$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)),$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)).$$

$\cos^2 x = (1-\sin^2 x)$

Интегралы вида

$$I_{m,n}=\int\sin^m x\cos^n x\,dx,$$

где m, n — четные числа, находят с помощью формул:

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x),\quad \cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x),\quad \sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x.$$

Если хотя бы одно из чисел m или n нечетное, то предварительно от нечетной степени отделяется множитель и вводится новая переменная. В частности, если $n=2k+1$, то

$$I_{m,n}=\int\sin^m x\cos^{2k+1}x\,dx=\int\sin^m x\cos^{2k}x\cos x\,dx=$$

$$=\int\sin^m x(1-\sin^2 x)^k\,d(\sin x)=\int t^m(1-t^2)^k\,dt.$$

Интегралы вида

$$\int R(\sin x,\cos x)\,dx,$$

где R — рациональная функция, приводятся к интегралам от рациональных функций новой переменной t с помощью подстановки

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t, \tag{11.10}$$

при этом

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2}. \tag{11.11}$$

Примеры. 1. Найти интеграл $\int\sin 7x\sin 5x\,dx$.

Поскольку

$$\sin 7x\sin 5x=\frac{1}{2}(\cos 2x-\cos 12x),$$

то

$$\int\sin 7x\sin 5x\,dx=\frac{1}{2}\int(\cos 2x-\cos 12x)\,dx=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 2x}{2}-\frac{\sin 12x}{12}\right)+C=$$

$$=\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{24}\sin 12x+C.$$

2. Найти интеграл $\int\sin^4 x\cos^3 x\,dx$.

Так как одна из степеней является нечетной ($m=3$), то интеграл можно найти следующим образом:

$$\int\sin^4 x\cos^3 x\,dx=\int\sin^4 x\cos^2 x\cos x\,dx=\int\sin^4 x(1-\sin^2 x)\,d(\sin x)=$$

$$=\int(\sin^4 x-\sin^6 x)\,d(\sin x)=\int\sin^4 x\,d(\sin x)-\int\sin^6 x\,d(\sin x)=$$

$$=\frac{\sin^5 x}{5}-\frac{\sin^7 x}{7}+C.$$

3. Найти интеграл $\displaystyle\int\frac{dx}{2+3\sin x+2\cos x}$.

Применяя подстановку (11.10) и формулы (11.11), преобразуем подынтегральное выражение:

$$\frac{dx}{2+3\sin x+2\cos x}=\frac{2dt/(1+t^2)}{2+3\dfrac{2t}{1+t^2}+2\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}=\frac{2dt}{4+6t}=\frac{dt}{2+3t}.$$

Следовательно,

$$\int\frac{dx}{2+3\sin x+2\cos x}=\int\frac{dt}{2+3t}=\frac{1}{3}\int\frac{d(3t)}{2+3t}=\frac{1}{3}\ln|2+3t|+C=$$

$$=\frac{1}{3}\ln\left|2+3\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

В задачах 11.162—11.197 найти интеграл.

11.162. $\int\sin^2 3x\,dx$.

11.163. $\int\cos^2(x/2)\,dx$.

11.164. $\int\sin^3 x\,dx$.

11.165. $\int\cos^5 x\,dx$.

11.166. $\int\sin x\cos^7 x\,dx$.

11.167. $\int\cos x\sin^9 x\,dx$.

11.168. $\int\sin^2 x\cos^5 x\,dx$.

11.169. $\int\sin^3 x\cos^4 x\,dx$.

11.170. $\int\sin^4 x\,dx$.

11.171. $\int\cos^4 x\,dx$.

11.172. $\int\sin^2 x\cos^4 x\,dx$.

11.173. $\int\sin^6 x\cos^2 x\,dx$.

11.174. $\int\cos^4 x\sin^6 x\,dx$.

11.175. $\int\sin^6 x\cos^6 x\,dx$.

11.176. $\int\sin^3 x\cos^3 x\,dx$.

11.177. $\int\sin^5 x\cos^5 x\,dx$.

11.178. $\int\sin^7 x\cos^3 x\,dx$.

11.179. $\int\cos^9 x\sin^4 x\,dx$.

11.180. $\int\sin 3x\cos 5x\,dx$.

11.181. $\int\sin 6x\sin 4x\,dx$.

11.182. $\int\cos 7x\cos 9x\,dx$.

11.183. $\int\sin(x/4)\sin(3x/4)\,dx$.

11.184. $\displaystyle\int\sin\frac{x}{5}\cos\frac{4x}{5}\,dx$.

11.185. $\displaystyle\int\cos\frac{x}{6}\cos\frac{5x}{6}\,dx$.

11.186. $\displaystyle\int\frac{dx}{9+4\cos x}$.

11.187. $\displaystyle\int\frac{dx}{6-4\cos x}$.

11.188. $\displaystyle\int\frac{dx}{4+3\sin x}$.

11.189. $\displaystyle\int\frac{dx}{2-5\sin x}$.

11.190. $\displaystyle\int\frac{dx}{1+8\cos^2 x}$.

11.191. $\displaystyle\int\frac{dx}{1+3\sin^2 x}$.

11.192. $\displaystyle\int\frac{dx}{2+3\sin x+2\cos x}$.

11.193. $\displaystyle\int\frac{dx}{3+\sin x-3\cos x}$.

11.194. $\displaystyle\int\frac{dx}{5+\sin x+2\cos x}$.

11.195. $\displaystyle\int\frac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x+\cos x}\,dx$.

11.196. $\displaystyle\int\frac{5-\sin x+3\cos x}{3+\sin x-3\cos x}\,dx$.

11.197. $\displaystyle\int\frac{dx}{16\sin^2 x+25\cos^2 x}$.

11.7. Интегрирование некоторых иррациональных функций

Интеграл вида

$$\int R\left(\sqrt[q_1]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_1}},\ \sqrt[q_2]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_2}},\ \ldots,\ \sqrt[q_k]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_k}}\right)dx, \quad (11.12)$$

где R — рациональная функция; $p_1, q_1, p_2, q_2, \ldots, p_k, q_k$ — целые числа, с помощью подстановки

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n \quad (11.13)$$

(здесь n — наименьшее общее кратное чисел $q_1, q_2, \ldots, q_k$) приводится к интегралу от рациональной функции.

Интеграл от дифференциального бинома, т. е. интеграл

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx,$$

где m, n, p — рациональные числа; a, b — постоянные, отличные от нуля, можно привести к интегралу от рациональной функции в трех случаях:

1) когда p — целое число;
2) когда $(m+1)/n$ — целое число;
3) когда $(m+1)/n+p$ — целое число.

В первом случае интеграл находят путем разложения на слагаемые по формуле бинома Ньютона, если $p>0$, или с помощью подстановки $x=t^N$, где N — общий знаменатель дробей m и n. Во втором случае интеграл вычисляют с помощью подстановки $a+bx^n=t^s$, где s — знаменатель дроби p, а в третьем случае — с помощью подстановки $ax^{-n}+b=t^s$.

Примеры. 1. Найти интеграл $\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}}dx$.

Это интеграл вида (11.12), причем $\frac{ax+b}{cx+d}=x$, т. е. $a=1$, $b=0$, $c=0$, $d=1$, $\frac{p_1}{q_1}=\frac{1}{2}$, $\frac{p_2}{q_2}=\frac{2}{3}$, $\frac{p_3}{q_3}=\frac{1}{2}$.

Поскольку $q_1=q_3=2$, $q_2=3$, то $n=6$, поэтому подстановка (11.13) принимает вид $x=t^6$, откуда $dx=6t^5dt$.

Следовательно,

$$\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}}dx=\int\frac{t^3}{t^4+t^3}6t^5dt=6\int\frac{t^5}{t+1}dt=6\int\frac{(t^5+1)-1}{t+1}dt=$$

$$=6\int\frac{t^5+1}{t+1}dt-6\int\frac{dt}{t+1}=6\int(t^4-t^3+t^2-t+1)\,dt-6\int\frac{d(t+1)}{t+1}=$$

$$=6\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t\right)-6\ln(t+1)+C=$$

$$=6\left(\frac{1}{5}\sqrt[6]{x^5}-\frac{1}{4}\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{3}\sqrt{x}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}-\ln|\sqrt[6]{x}+1|\right)+C.$$

2. Найти интеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[4]{x})^2}$.

Записывая подынтегральную функцию в виде

$$\frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[4]{x})^2}=x^{-1/2}(1+x^{1/4})^{-2}$$

и сравнивая ее с функцией $x^m(1+x^n)^p$, заключаем, что $m=-1/2$, $n=1/4$, $p=-2$. Так как $p=-2$ — целое число, имеем первый случай интегрируемости дифференциального бинома. Общий знаменатель дробей m и n равен 4, поэтому применяем подстановку $x=t^4$, откуда $dx=4t^3dt$.

Таким образом,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[4]{x})^2}=\int\frac{4t^3dt}{t^2(1+t)^2}=4\int\frac{tdt}{(1+t)^2}=4\int\frac{(t+1)-1}{(1+t)^2}dt=$$

$$=4\int\left[\frac{1}{t+1}-\frac{1}{(t+1)^2}\right]dt=4\left(\ln|t+1|+\frac{1}{t+1}\right)+C=$$

$$=4\left(\ln|\sqrt[4]{x}+1|+\frac{1}{\sqrt[4]{x}+1}\right)+C.$$

В задачах 11.198—11.212 найти интеграл от иррациональной функции.

11.198. $\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}dx$. **11.199.** $\int\frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1-\sqrt[3]{x})}dx$.

11.200. $\int\frac{\sqrt[6]{x}\,dx}{x(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})}$. **11.201.** $\int\frac{dx}{\sqrt{2x+3}+5}$.

11.202. $\int\frac{dx}{x\sqrt{3x+4}}$. **11.203.** $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}$.

11.204. $\int\frac{\sqrt[6]{2x-1}+1}{(2x-1)(\sqrt[3]{2x-1}-1)}dx$. **11.205.** $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x}$.

11.206. $\int\frac{(1-\sqrt[6]{x})^3}{\sqrt[3]{x}}dx$. **11.207.** $\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[6]{x}}}{\sqrt{x}}dx$.

11.208. $\int\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx$. **11.209.** $\int\frac{xdx}{(3+x^2)^{3/2}}$. **11.210.** $\int\frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

11.211. $\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^6}dx$. **11.212.** $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}(1+\sqrt[3]{x^2})}$.

11.8. Интегрирование гиперболических функций

Интегрирование гиперболических функций основано на формулах:

$$\int \operatorname{ch}x\,dx=\operatorname{sh}x+C,\quad \int\operatorname{sh}x\,dx=\operatorname{ch}x+C,$$

$$\int\frac{dx}{\operatorname{ch}^2x}=\operatorname{th}x+C,\quad \int\frac{dx}{\operatorname{sh}^2x}=-\operatorname{cth}x+C.$$

Интегралы от выражений с четными степенями $\operatorname{ch}x$ и $\operatorname{sh}x$ находят с помощью формул:

$$\operatorname{ch}^2x=\frac{1}{2}(\operatorname{ch}2x+1),\quad \operatorname{sh}^2x=\frac{1}{2}(\operatorname{ch}2x-1),\quad \operatorname{sh}x\operatorname{ch}x=\frac{\operatorname{sh}2x}{2}.$$

Интегралы от нечетных степеней $\operatorname{sh}x$ и $\operatorname{ch}x$ находят путем отделения множителя первой степени и введения новой переменной.

Примеры. 1. Найти интеграл $\int \operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh}^3 x dx$.

Преобразуя подынтегральную функцию, получаем

$$\int \operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh}^3 x dx = \int \operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh}^2 x \operatorname{sh} x dx = \int \operatorname{ch}^2 x (\operatorname{ch}^2 x - 1)\, d(\operatorname{ch} x) =$$
$$= \int \operatorname{ch}^4 x d(\operatorname{ch} x) - \int \operatorname{ch}^2 x d(\operatorname{ch} x) = \frac{\operatorname{ch}^5 x}{5} - \frac{\operatorname{ch}^3 x}{3} + C.$$

2. Найти интеграл $\int \operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh}^2 x dx$.

Преобразуя подынтегральную функцию, получаем

$$\int \operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh}^2 x dx = \int (\operatorname{ch} x \operatorname{sh} x)^2 dx = \int \left(\frac{1}{2} \operatorname{sh} 2x\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int \operatorname{sh}^2 2x dx =$$
$$= \frac{1}{4}\int \frac{\operatorname{ch} 4x - 1}{2} dx = \frac{1}{8}\int \operatorname{ch} 4x dx - \frac{1}{8}\int dx = \frac{1}{32} \operatorname{sh} 4x - \frac{1}{8} x + C.$$

В задачах 11.213—11.248 найти интеграл от гиперболической функции.

11.213. $\int \operatorname{ch} 2x dx$. **11.214.** $\int \operatorname{sh}(x/3)\, dx$. **11.215.** $\int \operatorname{th} x dx$.

11.216. $\int \operatorname{cth} x dx$. **11.217.** $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 (x/4)}$. **11.218.** $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 (x/5)}$.

11.219. $\int \operatorname{sh}^2 4x dx$. **11.220.** $\int \operatorname{ch}^2 3x dx$. **11.221.** $\int \operatorname{cth}^2 5x dx$.

11.222. $\int \operatorname{th}^2 7x dx$. **11.223.** $\int \operatorname{ch}^3 x dx$. **11.224.** $\int \operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh} x dx$.

11.225. $\int \operatorname{sh}^3 x \operatorname{ch} x dx$. **11.226.** $\int \operatorname{ch}^4 x dx$. **11.227.** $\int \operatorname{sh}^4 x dx$.

11.228. $\int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^3 x dx$. **11.229.** $\int \operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh}^4 x dx$. **11.230.** $\int \operatorname{sh}^5 x \operatorname{ch}^2 x dx$.

11.231. $\int \operatorname{sh}^7 x \operatorname{ch}^5 x dx$. **11.232.** $\int \operatorname{ch}^4 x \operatorname{sh}^4 x dx$. **11.233.** $\int \operatorname{ch}^4 x \operatorname{sh}^2 x dx$.

11.234. $\int x \operatorname{ch} x dx$. **11.235.** $\int x \operatorname{sh} x dx$. **11.236.** $\int x^2 \operatorname{ch} x dx$.

11.237. $\int x^3 \operatorname{sh} x dx$. **11.238.** $\int \frac{x}{\operatorname{ch}^2 x} dx$. **11.239.** $\int \frac{\operatorname{ch}\sqrt{2-x}}{\sqrt{2-x}} dx$.

11.240. $\int \operatorname{sh}\sqrt{x} dx$. **11.241.** $\int \operatorname{ch}\sqrt{x} dx$. **11.242.** $\int \operatorname{ch} x \cos x dx$.

11.243. $\int \sin x \operatorname{ch} x dx$. **11.244.** $\int \cos x \operatorname{sh} x dx$. **11.245.** $\int \frac{2 + 7 \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x} dx$.

11.246. $\int \frac{\operatorname{ch} x dx}{\operatorname{sh}^3 x}$. **11.247.** $\int \frac{\operatorname{sh} x dx}{\operatorname{ch}^4 x}$. **11.248.** $\int \frac{\operatorname{ch}^3 x dx}{\operatorname{sh}^2 x}$.

В задачах 11.249—11.274 найти интеграл, применяя различные методы.

11.249. $\int x\sqrt{(3x+7)^8} dx$. **11.250.** $\int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}}$. **11.251.** $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^3}}$.

11.252. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$. **11.253.** $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^8-3}}$. **11.254.** $\int \frac{e^{3x}}{e^{6x}-9} dx$.

11.255. $\int \frac{e^{4x}}{e^{8x}+4} dx$. **11.256.** $\int \frac{\sqrt{2x+3}}{x} dx$. **11.257.** $\int \frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} dx$.

11.258. $\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x} dx$. **11.259.** $\int \frac{\sqrt{x^2+16}}{16} dx$.

11.260. $\int \frac{dx}{(x-3)\sqrt{x^2+4x}}$. **11.261.** $\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2+1}}$.

11.262. $\int \frac{dx}{(x+3)\sqrt{x^2-1}}$. **11.263.** $\int \frac{x^2+x+1}{x^6+x^4-x^2-1} dx$.

11.264. $\int \frac{x^4+x^2-1}{x^6+4x^4+5x^2+2} dx$. **11.265.** $\int \frac{x^4+x^3-5x^2+6x+7}{x^5-2x^4+2x^3-4x^2+x-2} dx$.

11.266. $\int \frac{x^4+2x^3-3x^2+4x-5}{x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1} dx$. **11.267.** $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 6 \sin x \cos x}$.

11.268. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + 10 \cos^2 x}$. **11.269.** $\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x - 4 \cos x + 3}$.

11.270. $\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x + 8 \sin x + 10}$. **11.271.** $\int \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x + 6 \sin x - 7} dx$.

11.272. $\int \frac{dx}{4 \operatorname{sh}^2 x + 9 \operatorname{ch}^2 x}$. **11.273.** $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x + \operatorname{sh} 2x}$.

11.274. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x + 3 \operatorname{sh} 2x + 10 \operatorname{ch}^2 x}$.

12. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Пусть на отрезке $[a, b]$ определена функция $y = f(x)$. Разобьем $[a, b]$ на n частей точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. В каждом из полученных элементарных отрезков длиной $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ произвольным образом выберем точку ξ_i и составим сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n.$$

Эта сумма называется *интегральной суммой* функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Обозначим через λ длину наибольшего из элементарных отрезков, т. е. $\lambda = \max \Delta x_i$.

Определенным интегралом от функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется предел ее интегральной суммы в случае, когда число элементарных отрезков неограниченно возрастает, а длина наибольшего из них стремится к нулю:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Если функция $y = f(x)$ непрерывна, то указанный предел существует и конечен.

Свойства определенного интеграла:

1) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \ldots = \int_a^b f(u)\,du;$

2) $\int_a^a f(x)\,dx = 0;$

3) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx;$

4) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx;$

5) $\int_a^b (f_1(x) - f_2(x) + f_3(x))\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx - \int_a^b f_2(x)\,dx + \int_a^b f_3(x)\,dx;$

6) $\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx \quad (c = \text{const}).$

12.1. Вычисление определенного интеграла

Определенный интеграл от непрерывной функции в данном промежутке равен разности значений любой первообразной этой функции для верхнего и нижнего пределов интегрирования:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \tag{12.1}$$

где $F'(x) = f(x)$.

Замена переменной в определенном интеграле осуществляется по формуле

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt, \tag{12.2}$$

где $x = \varphi(t)$; $a = \varphi(\alpha)$; $b = \varphi(\beta)$; t — новая переменная; α, β — новые пределы интегрирования.

Интегрирование по частям в определенном интеграле выполняется по формуле

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)\,v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\,du(x).$$

Примеры. 1. Вычислить определенный интеграл $\int_2^4 (32 + 4x - 3x^2)\,dx$.

Принимая во внимание свойства 5 и 6 определенного интеграла, по формуле (12.1) находим

$$\int_2^4 (32 + 4x - 3x^2)\,dx = 32\int_2^4 dx + 4\int_2^4 x dx - 3\int_2^4 x^2 dx =$$

$$= 32x\Big|_2^4 + 4\,\frac{x^2}{2}\Big|_2^4 - 3\,\frac{x^3}{3}\Big|_2^4 = 32\,(4-2) + 2\,(4^2 - 2^2) - (4^3 - 2^3) = 32.$$

2. Вычислить $\int_0^{\pi/2} \cos^4\varphi\,d\varphi$.

Преобразуя подынтегральную функцию, используя свойства определенного интеграла, по формуле (12.1) находим

$$\int_0^{\pi/2} \cos^4\varphi\,d\varphi = \int_0^{\pi/2} (\cos^2\varphi)^2 d\varphi = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} (1 + 2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\left(1 + 2\cos 2\varphi + \frac{1+\cos 4\varphi}{2}\right)d\varphi =$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2} (3 + 4\cos 2\varphi + \cos 4\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{8}\left(3\varphi + 2\sin 2\varphi + \frac{1}{4}\sin 4\varphi\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{3}{16}\pi.$$

3. Вычислить $\int_0^{\pi/2} t\cos t dt$.

Интегрируя по частям, находим

$$\int_0^{\pi/2} t\cos t dt = \int_0^{\pi/2} t d(\sin t) = t\sin t\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin t dt =$$

$$= t\sin t\Big|_0^{\pi/2} + \cos t\Big|_0^{\pi/2} = \pi/2 - 1.$$

4. Вычислить $\int_{-b}^{b} \frac{4}{3b}\left(\sqrt{b^2 - x^2}\right)^3 dx$.

Введем новую переменную t по формуле $x = b\sin t$. Найдем новые пределы интегрирования: при $x = -b$ получаем $-b = b\sin t$, $\sin t = -1$, $\alpha = -\pi/2$; при $x = b$ имеем $b = b\sin t$, $\sin t = 1$, $\beta = \pi/2$. Так как $dx = b\cos t dt$, по формуле (12.2) находим

$$\int_{-b}^{b} \frac{4}{3b}\left(\sqrt{b^2 - x^2}\right)^3 dx = \frac{4}{3b}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\sqrt{b^2 - b^2\sin^2 t}\right)^3 b\cos t dt =$$

$$= \frac{4}{3b}\,b^4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 t\cos t dt = \frac{4}{3}\,b^3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 t dt = \frac{4}{3}\,b^3\,\frac{3}{8}\,\pi = \frac{\pi b^3}{2}.$$

(Здесь принят во внимание результат примера 2: $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 t dt = \frac{3}{8}\pi$.)

В задачах 12.1—12.12 вычислить определенный интеграл.

12.1. $\int_{-1}^{3} \left(x + \frac{3}{4}\right) dx$.

12.2. $\int_3^6 (36 - x^2)\,dx$.

12.3. $\int_0^4 (32 + 28y - 9y^2)\,dy$.

12.4. $\int_0^b y^2\,(b^2 - y^2)\,dy$.

12.5. $\int\limits_{-2}^{2}\left(\frac{25}{32}x^2+\frac{13}{8}x+\frac{1}{8}\right)dx.$ 12.6. $\int\limits_{0}^{1}\frac{x+x^2-x^3-1}{(1+x)^2}dx.$

12.7. $\int\limits_{0}^{\pi/2}\sin^3 2\varphi d\varphi.$ 12.8. $\int\limits_{0}^{\pi}(1-\cos t)^3dt.$ 12.9. $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^4\varphi d\varphi.$

12.10. $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos^3\varphi d\varphi.$ 12.11. $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos^5\varphi d\varphi.$ 12.12. $\int\limits_{0}^{\pi/2}\cos^6\varphi d\varphi.$

В задачах 12.13—12.20 вычислить интеграл методом интегрирования по частям.

12.13. $\int\limits_{0}^{2\pi}t\sin\frac{t}{2}dt.$ 12.14. $\int\limits_{0}^{1}xe^{2x}dx.$ 12.15. $\int\limits_{0}^{\pi/2}\varphi\sin 2\varphi d\varphi.$

12.16. $\int\limits_{0}^{2\pi}x\cos^2 xdx.$ 12.17. $\int\limits_{0}^{\pi/2}t^2\sin tdt.$ 12.18. $\int\limits_{0}^{\pi/2}t^2\cos^2 tdt.$

12.19. $\int\limits_{1}^{e}\ln xdx.$ 12.20. $\int\limits_{0}^{1}\arccos xdx.$

В задачах 12.21—12.32 вычислить интеграл методом замены переменной.

12.21. $\int\limits_{0}^{2}x^2\sqrt{4-x^2}\,dx.$ 12.22. $\int\limits_{-2}^{2}\sqrt{8-2x^2}\,dx.$ 12.23. $\int\limits_{\sqrt{2}}^{2}x^2\sqrt{8-2x^2}dx.$

12.24. $\int\limits_{1}^{2}\sqrt{(8-2y^2)^3}dy.$ 12.25. $\int\limits_{1}^{2}x\sqrt{2-x}\,dx.$ 12.26. $\int\limits_{0}^{4}\sqrt{4x-x^2}dx.$

12.27. $\int\limits_{0}^{2a}\sqrt{2ax-x^2}\,dx.$ 12.28. $\int\limits_{0}^{2}\rho\sqrt{R^2-\rho^2}\,d\rho.$ 12.29. $\int\limits_{0}^{1}\frac{xdx}{(1+x^2)\sqrt{2+x^2}}.$

12.30. $\int\limits_{0}^{R}(R^2-\rho^2)^{3/2}d\rho.$ 12.31. $\int\limits_{-2}^{2}\varphi^4\sqrt{8-2\varphi^2}d\varphi.$ 12.32. $\int\limits_{-2}^{2}\sqrt{(8-2u^2)^5}du.$

В задачах 12.33—12.50 вычислить определенный интеграл.

12.33. $\int\limits_{1}^{4}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx.$ 12.34. $\int\limits_{0}^{2\pi}\sin x\sin\frac{x}{2}dx.$

12.35. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3}\left(\cos^2 t+\frac{\cos t}{\sin^3 t}\right)dt.$ 12.36. $\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{dt}{\sin t}.$

12.37. $\int\limits_{0}^{\pi/2}(\cos^3 x+\sin x\cos x)\,dx.$ 12.38. $\int\limits_{0}^{2}\operatorname{sh}\varphi\sqrt{\operatorname{sh}^2\varphi+1}d\varphi.$

12.39. $\int\limits_{0}^{1}x^3\sqrt{2-x^2}\,dx.$ 12.40. $\int\limits_{0}^{1}(y^3\sqrt{2-y^2}-y^4)\,dy.$

12.41. $\int\limits_{1}^{2}\frac{dx}{x^2+2x}.$ 12.42. $\int\limits_{2}^{3}\frac{dx}{x^2+4x}.$

12.43. $\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2+2x+2}.$ 12.44. $\int\limits_{-2}^{1}\frac{dx}{x^2+4x+13}.$

12.45. $\int\limits_{1}^{2}\frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}.$ 12.46. $\int\limits_{2}^{5}\frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}.$

12.47. $\int\limits_{0}^{\text{[illegible]}}\frac{dx}{\sqrt{x+1}+7}.$ 12.48. $\int\limits_{-1}^{3}\frac{dx}{\sqrt{2x+3}+2}.$

12.49. $\int\limits_{-\pi/4}^{3\pi/4}(\cos x+\sin x)^8\,dx.$ 12.50. $\int\limits_{-\pi/4}^{3\pi/4}(\sin^2 x(\sin x+\cos x)^6)\,dx.$

12.2. Площадь плоской криволинейной фигуры

Площадь криволинейной трапеции $ABba$ (рис. 12.1), ограниченной сверху графиком функции $y=f(x)$, слева и справа соответственно прямыми $x=a$, $x=b$, снизу осью Ox, вычисляется по формуле

$$S=\int\limits_a^b ydx \quad \text{или} \quad S=\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

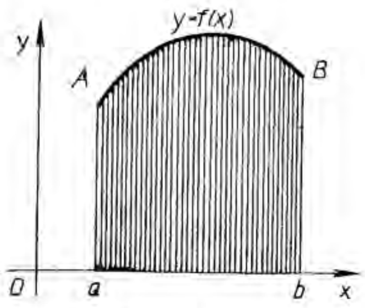


Рис. 12.1

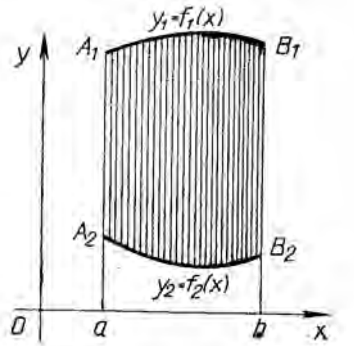


Рис. 12.2

Если функция задана параметрическими уравнениями: $x=\varphi_1(t)$, $y=\varphi_2(t)$ $(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$, то

$$S=\int\limits_\alpha^\beta\varphi_2(t)\,\varphi_1'(t)dt.$$

Площадь криволинейной фигуры $A_1B_1B_2A_2$ (рис. 12.2), ограниченной сверху и снизу соответственно линиями $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$, слева и справа прямыми $x = a$ и $x = b$, определяется формулой

$$S = \int_a^b (y_1 - y_2)\,dx \quad \text{или} \quad S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))\,dx. \qquad (12.3)$$

Площадь криволинейной трапеции $cdDC$ (рис. 12.3), прилежащей к оси Oy, вычисляется по формуле

$$S = \int_c^d x\,dy \quad \text{или} \quad S = \int_c^d \varphi(y)\,dy \qquad (12.4)$$

($x = \varphi(y)$ — уравнение дуги CD, ограничивающей трапецию справа; $y = c$, $y = d$ — уравнения прямых, ограничивающих ее соответственно снизу и сверху).

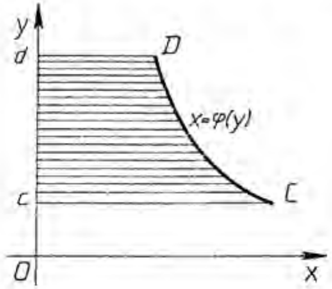


Рис. 12.3

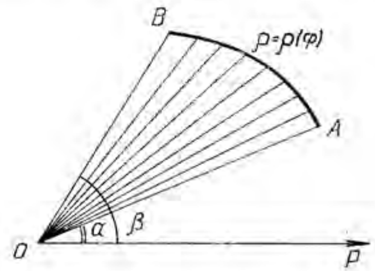


Рис. 12.4

Площадь сектора OAB (рис. 12.4), ограниченного дугой AB линии, заданной уравнением $\rho = \rho(\varphi)$ в полярных координатах и двумя полярными радиусами OA и OB, для которых соответственно $\varphi_1 = \alpha$, $\varphi_2 = \beta$, вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2 d\varphi.$$

Примеры. 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y - x^2 = 0$, $x - y + 2 = 0$.

Данная фигура сверху ограничена прямой $x - y + 2 = 0$, снизу параболой $y - x^2 = 0$ (рис. 12.5). Искомую площадь вычислим по формуле (12.3). Предварительно находим пределы интегрирования и выражения для y_1, y_2. Пределами интегрирования будут абсциссы точек пересечения параболы и прямой. Решая систему уравнений $y - x^2 = 0$, $x - y + 2 = 0$, находим: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, т. е. $a = -1$, $b = 2$. Выражая y из каждого уравнения, получаем:

$$y_1 = f_1(x) = x + 2, \quad y_2 = f_2(x) = x^2$$

(через $y_1 = f_1(x)$ обозначена функция, график которой ограничивает криволинейную фигуру сверху).

По формуле (12.3) находим

$$S = \int_{-1}^{2} [(x+2) - x^2]\,dx = \int_{-1}^{2} x\,dx + 2\int_{-1}^{2} dx - \int_{-1}^{2} x^2 dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{2} + 2x\Big|_{-1}^{2} - \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} = 2 - \frac{1}{2} + 4 + 2 - \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = 4\,\frac{1}{2}.$$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной осью Oy и линиями $y = x^3$, $y = 8$ (рис. 12.6).

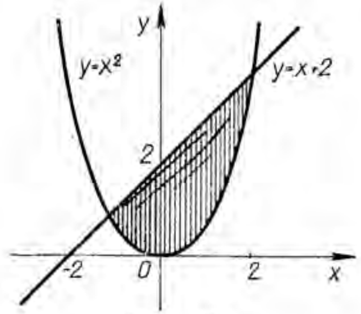


Рис. 12.5

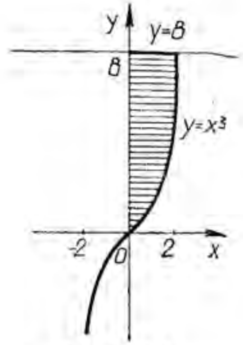


Рис. 12.6

Из уравнения $y = x^3$ находим $x = \sqrt[3]{y}$ и применяем формулу (12.4). Пределы интегрирования $c = y_1 = 0$, $d = y_2 = 8$ определены в результате решения систем уравнений: $y = x^3$, $x = 0$; $y = x^3$, $y = 8$. По указанной формуле получаем

$$S = \int_0^8 y^{1/3} dy = \frac{3}{4} y^{4/3}\Big|_0^8 = \frac{3}{4}\cdot 16 = 12.$$

В задачах 12.51—12.90 вычислить площадь фигуры, ограниченной указанными линиями.

12.51. $y - x = 0$, $y = 2x$, $x - 2 = 0$. **12.52.** $y - x^2 = 0$, $y = 2$.

12.53. $y^2 - x + 1 = 0$, $x - 5 = 0$.

12.54. $x^2 - 4x + y = 0$ и осью Ox.

12.55. $y = x^2 - 6x + 5$ и осью Ox.

12.56. $y = 8x - x^2 - 12$ и осью Ox.

12.57. $y = 2x - x^2 + 8$ и осью Ox.

12.58. $x = y^2 + 2y - 3$ и осью Oy.

12.59. $x = y - y^2 + 6$ и осью Oy. **12.60.** $y - x^2 = 0$, $y - x = 0$.

12.61. $y = x^2 + 1$, $x + y - 3 = 0$.

12.62. $x = y^2 + 1$, $x - y - 3 = 0$.

12.63. $xy - 6 = 0$, $x + y - 7 = 0$.

12.64. $x^2 + y^2 = 8$, $y - x = 0$, $y - \sqrt{3x} = 0$ $(x > 0,\ y > 0)$.

12.65. $x^2 - y^2 = 9$, $y = -4$, $y = 4$.

12.66. $y^2 - x^2 = 16$, $x = -3$, $x = 3$. **12.67.** $xy = 1$, $y = x$, $x = 2$.

12.68. $x^2 + y^2 = 4$, $y = 2x - x^2$ $(x > 0,\ y > 0)$ и осью Oy.

12.69. $x = y^3$, $x = 1$ и осью Ox. **12.70.** $y = 2 - x^2$, $y^3 = x^2$.

12.71. $y^2 = 4x,\ y^2 = 4x - x^2,\ x = 4.$
12.72. $y = x^3 - 3x + 2$ и осью Ox.
12.73. $y = x^4 - 10x^2 + 9$, осью Ox и расположенной выше этой оси.
12.74. $y = x^4 - 10x^2 + 9$, осью Ox и расположенной ниже этой оси.
12.75. $y = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x$, осью Ox и расположенной выше этой оси.
12.76. $y = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x$, осью Ox и расположенной ниже этой оси.
12.77. $x = 2\cos^3 t,\ y = 2\sin^3 t$. **12.78.** $x = 4\cos t,\ y = 3\sin t$.
12.79. $\rho^2 = 9\cos 2\varphi$. **12.80.** $\rho^2 = 4\sin 2\varphi$.
12.81. $x = a\cos t,\ y = b\sin t$. **12.82.** $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$.
12.83. $x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t\ \ (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.
12.84. $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)\ \ (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.
12.85. $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$. **12.86.** $\rho^2 = a^2\sin 2\varphi$.
12.87. $\rho = 4\sin^2\varphi\ \ (0 \leqslant \varphi \leqslant \pi)$. **12.88.** $\rho = 2 + \cos\varphi$.
12.89. $\rho = a(1 + \cos\varphi)$. **12.90.** $\rho = a\cos 3\varphi$.

12.3. Объем тела вращения. Длина дуги кривой. Площадь поверхности вращения

Объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции $aABb$ (рис. 12.7), где AB — дуга кривой $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, вычисляется по формуле

$$V_x = \pi\int_a^b y^2dx \quad \text{или} \quad V_x = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx. \tag{12.5}$$

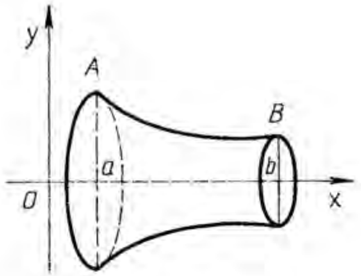


Рис. 12.7

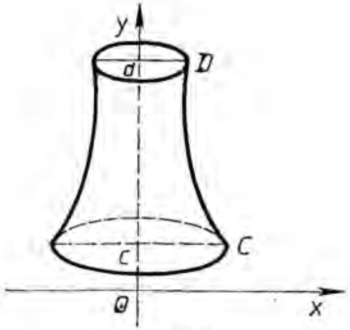


Рис. 12.8

Объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции $cdDC$ (рис. 12.8), где CD — дуга кривой $x = \varphi(y)$ $(c \leqslant y \leqslant d)$, определяется по формуле

$$V_y = \pi\int_c^d x^2dy \quad \text{или} \quad V_y = \pi\int_c^d \varphi^2(y)\,dy.$$

Длина дуги кривой $y = f(x)$, где $a \leqslant x \leqslant b$, вычисляется по формуле

$$l = \int_a^b\sqrt{1 + y'^2}\,dx \quad \text{или} \quad l = \int_a^b\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

Длина дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями: $x = \varphi_1(t)$, $y = \varphi_2(t)$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$, выражается формулой

$$l = \int_\alpha^\beta\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,dt \quad \text{или} \quad l = \int_\alpha^\beta\sqrt{(\varphi_1'(t))^2 + (\varphi_2'(t))^2}\,dt.$$

Если кривая задана уравнением в полярных координатах $\rho = \rho(\varphi)$ $(\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta)$, то

$$l = \int_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,d\varphi.$$

Площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги кривой $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, определяется по формуле

$$S_x = 2\pi\int_a^b y\,dl = 2\pi\int_a^b y\sqrt{y'^2 + 1}\,dx, \tag{12.6}$$

где dl — дифференциал длины дуги.

В случае другого способа задания кривой площадь поверхности S_x определяется по формуле (12.6) путем соответствующей замены переменных.

Примеры. 1. Вычислить объем тела, полученного вращением эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ вокруг оси Ox. (Это тело ограничено поверхностью, которая называется *эллипсоидом вращения.*)

Искомый объем вычислим по формуле (12.5), предварительно выразив y^2 из уравнения эллипса:

$$V_x = \pi\int_{-a}^a b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)dx = \pi b^2\int_{-a}^a dx - \frac{\pi b^2}{a^2}\int_{-a}^a x^2dx =$$

$$= \pi b^2x\Big|_{-a}^a - \frac{\pi b^2}{a^2}\frac{x^3}{3}\Big|_{-a}^a = \pi b^2[a - (-a)] - \frac{\pi b^2}{3a^2}[a^3 - (-a)^3] = \frac{4}{3}\pi ab^2.$$

2. Найти длину дуги кривой $y = \ln\cos x$ между точками $x = 0$, $x = \pi/4$.

Поскольку

$$y' = \frac{\sin x}{\cos x},\ \sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{1}{\cos x} \quad (0 \leqslant x \leqslant \pi/4),$$

то

$$l = \int_0^{\pi/4}\sqrt{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}\,dx = \int_0^{\pi/4}\frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|\Bigg|_0^{\pi/4} =$$

$$= \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}\right)\right| - \ln\left|\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right| = \ln\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8} \approx 0{,}876.$$

3. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги линии $y = \operatorname{ch} x$, где $0 \leqslant x \leqslant 1$. (Эта поверхность называется *катеноидом.*)

Так как $y' = \operatorname{sh} x$, по формуле (12.6) получаем

$$S_x = 2\pi \int_0^1 \operatorname{ch} x \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x}\, dx = 2\pi \int_0^1 \operatorname{ch} x \operatorname{ch} x\, dx =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \frac{1}{2} (\operatorname{ch} 2x + 1)\, dx = \pi \int_0^1 \operatorname{ch} 2x dx + \pi \int_0^1 dx =$$

$$= \frac{\pi \operatorname{sh} 2x}{2} \Big|_0^1 + \pi x \Big|_0^1 = \frac{\pi \operatorname{sh} 2}{2} + \pi \approx 8{,}839.$$

В задачах 12.91—12.97 вычислить длину дуги линии.

12.91. $y = \frac{1}{3} x\sqrt{x} - \sqrt{x}$ (между точками пересечения линии с осью Ox).

12.92. $y = \ln \sin x$ $(\pi/3 \leqslant x \leqslant \pi/2)$.

12.93. $y = \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{2} \ln x$ $(1 \leqslant x \leqslant 4)$.

12.94. $x = 2(\cos t + t \sin t)$, $y = 2(\sin t - t \cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi/2)$.

12.95. $x = t - \frac{\operatorname{sh} 2t}{2}$, $y = 2 \operatorname{ch} t$ $(0 \leqslant t \leqslant 2)$.

12.96. $r = 3(1 + \cos \varphi)$ (всей линии).

12.97. $r = 4 \sin^3 \varphi/3$ (всей линии).

В задачах 12.98—12.102 найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной указанными линиями.

12.98. $2y^2 = x^3$, $x = 4$. **12.99.** $y^2 + x^4 = x^2$.

12.100. $y = a \operatorname{ch}(x/a)$, $x = \pm a$, $y = 0$.

12.101. $x^2 - y^2 = a^2$, $x = \pm 2a$. **12.102.** $x = a \cos t$, $y = b \sin t$.

В задачах 12.103—12.107 найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной указанными линиями.

12.103. $y^3 = 4x^2$, $y = 2$. **12.104.** $x^2 + y^4 = y^2$.

12.105. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$. **12.106.** $y = x^3$, $x = 0$, $y = 8$.

12.107. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

В задачах 12.108—12.111 найти площадь поверхности, полученной вращением дуги кривой вокруг оси Ox.

12.108. $y = \operatorname{tg} x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi/4$.

12.109. $x = \frac{1}{4} y^2 - \frac{1}{2} \ln y$, $1 \leqslant y \leqslant e$.

12.110. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

12.111. $x = a(2 \cos t - \cos 2t)$, $y = a(2 \sin t - \sin 2t)$.

В задачах 12.112, 12.113 найти площадь поверхности, полученной вращением линии вокруг оси Oy.

12.112. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

12.113. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

12.4. Некоторые физические и химические задачи

Определенный интеграл находит широкое применение при решении прикладных задач.

При решении физических и химических задач необходимо прежде всего определить, какую из величин принять за независимую переменную, а какую — за искомую функцию. Затем надо найти выражение для приращения искомой функции y в случае, когда аргумент x получит приращение Δx, т. е. выразить разность $y(x + \Delta x) - y(x)$ через величины, о которых идет речь в условии конкретной задачи. Разделив эту разность на Δx и перейдя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим уравнение, содержащее производную $y' = dy/dx$ (такое уравнение называется *дифференциальным*). В одном из простейших случаев, когда $y' = f(x)$, $dy/dx = f(x)$, $dy = f(x)dx$, получаем $y = F(x) + C$, где $F'(x) = f(x)$. Значение постоянной C определяется из условия задачи.

Многие химические реакции и физические процессы характеризуются тем, что скорость изменения переменной величины пропорциональна первой степени этой переменной. Такие процессы называются *процессами первого порядка* и описываются уравнением

$$\frac{dx}{dt} = kx.$$

В случае химической реакции входящие в это уравнение величины означают следующее: x — количество вещества, k — постоянная (константа скорости реакции), t — время.

Пример. В сосуд, содержащий 20 л воды, со скоростью 4 л/мин поступает раствор, в каждом литре которого находится 0,2 кг соли. В сосуде раствор перемешивается с водой, и смесь вытекает из сосуда с той же скоростью. Сколько соли будет в сосуде через 10 мин?

Примем за независимую переменную время t, а за искомую функцию $y(t)$ — количество соли в сосуде через t мин после начала опыта. Определим, как изменится количество соли за промежуток времени от момента t до момента $t + \Delta t$. За одну минуту поступает 4 л раствора, а за Δt мин — $4\Delta t$ л. В $4\Delta t$ л содержится $0{,}2 \cdot 4\Delta t = 0{,}8\Delta t$ кг соли. С другой стороны, за время Δt из сосуда вытекает $4\Delta t$ л раствора. В момент t во всем сосуде (20 л) содержится $y(t)$ кг соли. Следовательно, в $4\Delta t$ л вытекающего раствора было бы $0{,}2\Delta t y(t)$ кг соли, если бы за время Δt содержание соли в сосуде оставалось неизменным. Но поскольку оно за это время изменяется на величину, бесконечно малую при $\Delta t \to 0$, то в вытекающих $4\Delta t$ л содержится $0{,}2\Delta t[y(t) + \alpha]$ кг соли, где $\alpha \to 0$ при $\Delta t \to 0$.

Следовательно, в растворе, поступающем за промежуток времени Δt, содержится $0{,}8\Delta t$ кг соли, а в вытекающем — $0{,}2\Delta t\,[y(t) + \alpha]$ кг. Приращение количества соли за это время $y(t + \Delta t) - y(t)$ равно разности найденных величин, т. е.

$$y(t + \Delta t) - y(t) = 0{,}8\Delta t - 0{,}2\Delta t\,[y(t) + \alpha].$$

Разделим это равенство почленно на Δt и перейдем к пределу при $\Delta t \to 0$. В левой части получим производную $y'(t) = dy/dt$, в правой — $0{,}8 - 0{,}2y(t)$, так как $\alpha \to 0$ при $\Delta t \to 0$:

$$\frac{dy}{dt} = 0{,}8 - 0{,}2y.$$

Перепишем это равенство в виде

$$\frac{dy}{0{,}8 - 0{,}2y} = dt, \quad \frac{-0{,}2dy}{0{,}8 - 0{,}2y} = -0{,}2dt.$$

Найдем неопределенные интегралы от левой и правой частей последнего равенства, воспользовавшись свойством $\int d\varphi(x) = \varphi(x) + C$:

$$\ln(0{,}8 - 0{,}2y) = -0{,}2t + \ln C_1,$$

где $\ln C_1 = C_2$ — постоянная интегрирования.

Переходя от логарифмов к их аргументам, получаем

$$0{,}8 - 0{,}2y = e^{-0{,}2t + \ln C_1} = C_1 e^{-0{,}2t}.$$

Осталось выразить y через t. Умножив обе части последнего равенства на 5, найдем $4 - y = 5C_1 e^{-0{,}2t}$, $y = 4 - Ce^{-0{,}2t}$, где $C = 5C_1$. Постоянная C определяется из условия задачи: $y = 0$ при $t = 0$:

$$0 = 4 - Ce^0 = 4 - C, \quad C = 4.$$

Следовательно, $y = 4 - 4e^{-0{,}2t}$. Через 10 мин в сосуде будет

$$y = 4 - 4e^{-0{,}2 \cdot 10} = 4 - 4e^{-2} \approx 4 - 4 \cdot 0{,}1353 \approx 3{,}459 \text{ кг соли.}$$

12.114. В сосуд, содержащий 10 л воды, со скоростью 2 л/мин непрерывно поступает раствор, в каждом литре которого содержится 0,3 кг соли. В сосуде раствор перемешивается с водой, и смесь вытекает из сосуда с той же скоростью. Сколько соли будет в сосуде через 5 мин?

12.115. В резервуаре имеется 100 л раствора, содержащего 5 кг растворенного вещества (соли). В резервуар поступает чистая вода со скоростью 30 л/мин. Одновременно с той же скоростью из него вытекает раствор. Сколько соли останется в резервуаре к моменту времени t?

12.116. В резервуар, содержащий 10 кг соли на 100 л смеси, каждую минуту поступает 30 л воды и вытекает 20 л смеси. Сколько соли останется в резервуаре через t мин?

12.117. Радиоактивный распад происходит таким образом, что уменьшение количества атомов dN за время dt пропорционально количеству N оставшихся атомов, т. е. $-dN = \lambda N dt$, где λ — свойственная данному веществу постоянная, называемая константой радиоактивности. Вычислить количество N атомов, не распавшихся к моменту t, если в момент $t = 0$ было N_0 атомов.

12.118. Двубромзамещенная янтарная кислота, взятая в количестве 5,11 г, гидролизуется в воде, нагретой до определенной температуры, по реакции: $COOH - CH_2 - CBr_2 - COOH + H_2O = COOH - CH_2 - CO - COOH + 2HBr$. При этом количество кислоты для различных моментов времени определяется данными из табл. 12.1.

Таблица 12.1

Время t, мин	0	10	20	30	40	50	60
Количество кислоты, г	5,11	3,77	2,74	2,02	1,48	1,08	0,80

Вычислить константу скорости реакции k, предположив, что это реакция первого порядка.

12.119. Скорость охлаждения тела в воздухе пропорциональна разности между температурой тела и температурой воздуха. Температура воздуха равна 20 °С. Известно, что в течение 20 мин тело охлаждается от 100 до 60 °С. Найти закон изменения температуры тела в зависимости от времени t.

12.120. Тело имеет температуру t_1, а окружающая его среда — постоянную температуру t_0, причем $t_0 < t_1$. Найти закон охлаждения этого тела.

12.121. Тело охладилось за 10 мин от 100 до 60 °С. Температура окружающего воздуха поддерживается равной 20 °С. Когда тело охладится до 25 °С?

12.122. Сосуд вместимостью 20 л содержит воздух (80 % азота и 20 % кислорода). В сосуд за секунду поступает 0,1 л азота, который непрерывно перемешивается, и вытекает такое же количество смеси. Через какое время в сосуде будет 99 % азота?

12.123. В воздухе комнаты объемом 200 м³ содержится 0,15 % углекислого газа (CO_2). Вентилятор подает в минуту 20 м³ воздуха, содержащего 0,04 % CO_2. Через какое время количество углекислого газа в воздухе комнаты уменьшится втрое?

12.124. За 30 дней распалось 50 % первоначального количества радиоактивного вещества. Через какое время останется 1 % от первоначального количества?

12.125. Опытным путем установлено, что в течение года из каждого грамма радия распадается 0,44 мг. Через сколько лет распадется половина имеющегося количества радия?

12.126. Цилиндрический бак, расположенный вертикально, имеет отверстие в днище. Половина воды из полного бака вытекает за 5 мин. За какое время вытечет вся вода?

12.127. Масса ракеты с полным запасом топлива равна M, без топлива m, скорость истечения продуктов горения из ракеты равна c, начальная скорость ракеты — нулю. Найти скорость ракеты после сгорания топлива, пренебрегая силой тяжести и сопротивлением воздуха.

13. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Интегралы с бесконечными пределами интегрирования и интегралы от неограниченных функций называются *несобственными интегралами*.

13.1. Интегралы с бесконечными пределами

Если функция $y = f(x)$ непрерывна при $x \geqslant a$, то несобственный интеграл с бесконечным верхним пределом определяется формулой

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{b \to +\infty} (F(b) - F(a)), \tag{13.1}$$

где $F'(x) = f(x)$.

Если в правой части равенства (13.1) существует конечный предел, несобственный интеграл называется *сходящимся*, в противном случае он называется *расходящимся*.

Признак сравнения. *Если $|f(x)| \leqslant \varphi(x)$ и интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ сходится, то сходится и интеграл (13.1).*

Аналогично определяются несобственный интеграл с бесконечным нижним пределом и несобственный интеграл с обоими бесконечными пределами:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x) = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx, \tag{13.2}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_{a}^{c} f(x)\,dx + \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{c}^{b} f(x)\,dx, \tag{13.3}$$

где c — любая точка из интервала $(-\infty, +\infty)$.

Примеры. 1. Исследовать, сходится ли несобственный интеграл $\int\limits_0^\infty \frac{x^2dx}{(1+x)^6}$.

Преобразуя подынтегральную функцию, находим

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^2dx}{(1+x)^6} = \int\limits_0^\infty \frac{(x^2+2x+1)-2x-1}{(x+1)^6}\,dx = \int\limits_0^\infty \frac{(x+1)^2-2(x+1)+1}{(x+1)^6}\,dx =$$

$$= \int\limits_0^\infty \frac{d(x+1)}{(x+1)^4} - 2\int\limits_0^\infty \frac{d(x+1)}{(x+1)^5} + \int\limits_0^\infty \frac{d(x+1)}{(x+1)^6} = -\frac{1}{3(x+1)^3}\Big|_0^\infty +$$

$$+ 2\cdot\frac{1}{4(x+1)^4}\Big|_0^\infty - \frac{1}{5(x+1)^5}\Big|_0^\infty = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{1}{30}.$$

(Здесь принято во внимание, что $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{(x+1)^k} = 0$, $k = 3, 4, 5$.)

Следовательно, данный несобственный интеграл сходится.

2. Исследовать, сходится ли несобственный интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^6}}$.

Поскольку

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^6}} = \frac{1}{\sqrt{x^6(1+1/x^6)}} = \frac{1}{x^3\sqrt{1+1/x^6}},$$

$$\frac{1}{x^3\sqrt{1+1/x^6}} < \frac{1}{x^3} \text{ при } x\to\infty$$

и

$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2}\Big|_1^\infty = \frac{1}{2},$$

то сходится и данный интеграл (согласно признаку сравнения).

В задачах 13.1—13.20 исследовать, сходится ли несобственный интеграл.

13.1. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(x+1)^6}$. **13.2.** $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(x+1)^7}$.

13.3. $\int\limits_0^\infty \frac{x^2}{(1+x^3)^2}\,dx$. **13.4.** $\int\limits_0^\infty \frac{(t+1)\,dt}{(t^2+2t+1)^3}$.

13.5. $\int\limits_0^\infty \frac{t^2dt}{(t+1)^8}$. **13.6.** $\int\limits_0^\infty \frac{t^4dt}{(t+1)^{10}}$.

13.7. $\int\limits_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2}$. **13.8.** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

13.9. $\int\limits_0^\infty \sin 2x dx$. **13.10.** $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^8}}$.

13.11. $\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$. **13.12.** $\int\limits_{-\infty}^0 e^x\,dx$.

13.13. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{5+4x^2+2x^4}$. **13.14.** $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{dx}{e^{-x}+e^x}$.

13.15. $\int\limits_{-\infty}^\infty x e^{\frac{-(x-a)^2}{2c^2}}\,dx$. **13.16.** $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2+\cos^2 x}$.

13.17. $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$. **13.18.** $\int\limits_{-\infty}^0 \frac{\operatorname{arcctg} x}{1+x^2}\,dx$.

13.19. $\int\limits_0^\infty e^{-2x}\cos 3x\,dx$. **13.20.** $\int\limits_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx$ $(a>0)$.

В задачах 13.21—13.30 вычислить площадь бесконечной трапеции, ограниченной указанными линиями.

13.21. $y = e^{-x}$ $(x \geqslant 0)$, $y = 0$. **13.22.** $y = xe^{-x}$ $(x \geqslant 0)$, $y = 0$.

13.23. $y = xe^{-x^2}$ $(x \geqslant 0)$, $y = 0$. **13.24.** $y = x^2e^{-x^3}$ $(x \geqslant 0)$, $y = 0$.

13.25. $y = 1/x^2$ $(x \geqslant 1)$, $y = 0$. **13.26.** $y = 1/(x^2-4)$ $(x \geqslant 5)$, $y = 0$.

13.27. $y = x/(1+x^4)$ $(x \geqslant 0)$, $y = 0$. **13.28.** $y = 1/(x^2+9)$, $y = 0$.

13.29. $y = 1/(x^2+4x+5)$, $y = 0$. **13.30.** $y = 1/(x^2+2x+2)$, $y = 0$.

13.2. Интегралы от неограниченных функций

Если функция $y = f(x)$ не ограничена в любой окрестности точки c отрезка $[a, b]$ и непрерывна при $a \leqslant x < c$ и $c < x \leqslant b$, то по определению

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\eta\to 0} \int\limits_{c+\eta}^{b} f(x)\,dx, \tag{13.4}$$

где ε и η изменяются независимо друг от друга. В случае $c = b$ или $c = a$ получаем

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx\quad(\varepsilon>0) \tag{13.5}$$

или

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\eta\to 0}\int_{a+\eta}^{b} f(x)\,dx\quad(\eta>0). \tag{13.6}$$

Несобственный интеграл (13.4) называется *сходящимся* или *расходящимся* в зависимости от того, существуют или нет пределы соответствующих определенных интегралов.

Примеры. 1. Исследовать, сходится ли несобственный интеграл $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Подынтегральная функция не определена в точках $x_1=-1$, $x_2=1$; при $x\to-1$ и $x\to 1$ эта функция неограниченно возрастает. Согласно формулам (13.5) и (13.6) имеем

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1+\varepsilon}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+$$

$$+\lim_{\eta\to 0}\int_{0}^{1-\eta}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\arcsin x\Big|_{-1+\varepsilon}^{0}+\lim_{\eta\to 0}\arcsin x\Big|_{0}^{1-\eta}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi.$$

2. Исследовать, сходится ли интеграл $\int\limits_0^1\frac{x^2\,dx}{1-x^2}$.

Подынтегральная функция не определена в точке $x=1$; она неограниченно возрастает при $x\to 1$. Преобразуя эту функцию, находим

$$\int_0^1\frac{x^2\,dx}{1-x^2}=\int_0^1\frac{x^2-1+1}{1-x^2}\,dx=\int_0^1\frac{1-(1-x^2)}{1-x^2}\,dx=$$

$$=\int_0^1\frac{dx}{1-x^2}-\int_0^1 dx=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\Bigg|_0^1-x\Big|_0^1.$$

Так как при $x\to 1$ $\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\to-\infty$, то данный несобственный интеграл расходится.

В задачах 13.31—13.42 исследовать, сходится ли несобственный интеграл.

13.31. $\int\limits_0^1\frac{dx}{x^2-1}$. **13.32.** $\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sin^2 t}{\cos t}\,dt$.

13.33. $\int\limits_0^1\frac{x^4\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$. **13.34.** $\int\limits_0^R\frac{x^3\,dx}{\sqrt{R^2-x^2}}$.

13.35. $\int\limits_0^a\frac{x^3\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$. **13.36.** $\int\limits_{-8}^{8}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

13.37. $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^3}$. **13.38.** $\int\limits_0^{\pi}\frac{dx}{1-\cos x}$.

13.39. $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}}$. **13.40.** $\int\limits_{-R/\sqrt{2}}^{R/\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}\,d\rho}{\sqrt{R^2-2\rho^2}}$.

13.41. $\int\limits_0^{R/(2\sqrt{2})}\frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{R^2-8\rho^2}}$. **13.42.** $\int\limits_{-R/2}^{R/2}\frac{\rho^5\,d\rho}{\sqrt{R^2-4\rho^2}}$.

В задачах 13.43—13.48 исследовать, при каких значениях параметра α сходится несобственный интеграл.

13.43. $\int\limits_a^b\frac{dx}{(x-a)^\alpha}\quad(b>a)$. **13.44.** $\int\limits_0^{\infty}e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx$.

13.45. $\int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx$. **13.46.** $\int\limits_0^1\frac{dx}{x^\alpha}$.

13.47. $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$. **13.48.** $\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$.

В задачах 13.49—13.60 вычислить несобственный интеграл.

13.49. $\int\limits_0^4\frac{dx}{\sqrt{x}}$. **13.50.** $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

13.51. $\int\limits_0^1\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$. **13.52.** $\int\limits_0^2\frac{x^2\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

13.53. $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$. **13.54.** $\int\limits_0^{0,5}\frac{dx}{x\ln^2 x}$.

13.55. $\int\limits_0^{0,4}\frac{dx}{\sqrt{2-5x}}$. **13.56.** $\int\limits_1^{e}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

13.57. $\int\limits_0^1\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$. **13.58.** $\int\limits_{\sqrt{2}}^{2}\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}$.

13.59. $\int\limits_0^1\ln x\,dx$. **13.60.** $\int\limits_0^1 x\ln^2 x\,dx$.

14. ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ

Точное вычисление определенного интеграла по формуле Ньютона — Лейбница не всегда возможно (так как первообразная подынтегральной функции иногда не выражается в элементарных функциях) или целесообразно (поскольку нахождение первообразной часто связано с громоздкими преобразованиями). В подобных ситуациях, а также в случае, когда подынтегральная функция задана табличным способом, определенные интегралы вычисляют приближенно. Существуют различные методы численного интегрирования функций. Рассмотрим, как применяются простейшие из них.

14.1. Формула трапеций

Формула трапеций имеет вид

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right), \qquad (14.1)$$

где

$$h = \frac{b-a}{n};\; x_k = a + kh;\; y_k = f(x_k)\; (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n) \qquad 14.2)$$

Правая часть формулы (14.1) выражает площадь фигуры, состоящей из трапеций, высота каждой из которых равна h (рис. 14.1).

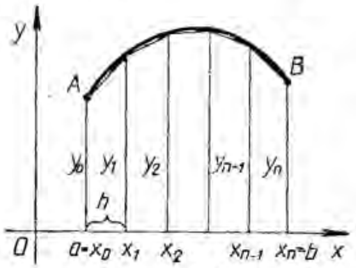


Рис. 14.1

Если R_n — остаточный член приближенной формулы (14.1), т. е.

$$\int_a^b f(x)\,dx = h\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right) + R_n,$$

то

$$|R_n| \leqslant \frac{(b-a)^3 M}{12n^2}, \qquad (14.3)$$

где $M = \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |f''(x)|$.

Примеры. 1. По формуле трапеций вычислить $\int_2^9 \frac{dx}{x-1}$ при $n = 7$.

Находим h, x_k и y_k по формулам (14.2):

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{9-2}{7} = 1;$$

$$x_k = 2 + k,\; y_k = f(x_k) = \frac{1}{x_k - 1} \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 7),$$

$$x_0 = 2,\; x_1 = 3,\; x_2 = 4,\; x_3 = 5,\; x_4 = 6,\; x_5 = 7,\; x_6 = 8,\; x_7 = 9;$$

$$y_0 = 1,\; y_1 = \frac{1}{2},\; y_2 = \frac{1}{3},\; y_3 = \frac{1}{4},\; y_4 = \frac{1}{5},\; y_5 = \frac{1}{6},\; y_6 = \frac{1}{7},\; y_7 = \frac{1}{8}.$$

В соответствии с формулой (14.1) получаем

$$\int_2^9 \frac{dx}{x-1} \approx 1\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{16}\right) = \frac{3621}{1680} \approx 2,16.$$

Замечание. Полученный результат почти на 0,1 отличается от результата, найденного по формуле Ньютона — Лейбница:

$$\int_2^9 \frac{dx}{x-1} = \ln(x-1)\Big|_2^9 = \ln 8 - \ln 1 \approx 2,08.$$

Это объясняется тем, что промежуток интегрирования большой, а число n невелико.

2. По формуле трапеций вычислить $\int_2^7 \frac{dx}{\sqrt{x+2}}$ при $n = 5$.

Находим h, x_k и y_k по формулам (14.2), в последнем случае пользуемся таблицей квадратных корней из чисел:

$$h = \frac{7-2}{5} = 1;\; x_k = 2 + k \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5),$$

$$x_0 = 2,\; x_1 = 3,\; x_2 = 4,\; x_3 = 5,\; x_4 = 6,\; x_5 = 7;$$

$$y_k = f(x_k) = \frac{1}{\sqrt{x_k + 2}} \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5),$$

$$y_0 = \frac{1}{\sqrt{2+2}} = \frac{1}{2},\; y_1 = \frac{1}{\sqrt{3+2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{2,236} \approx 0,447,$$

$$y_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \approx \frac{1}{2,449} \approx 0,409,\; y_3 = \frac{1}{\sqrt{7}} \approx \frac{1}{2,646} \approx 0,377,$$

$$y_4 = \frac{1}{\sqrt{8}} \approx \frac{1}{2,828} \approx 0,353,\; y_5 = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}.$$

По формуле (14.1) получаем

$$\int_2^7 \frac{dx}{\sqrt{x+2}} \approx 1\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \frac{y_5}{2}\right) =$$

$$= (0,250 + 0,447 + 0,409 + 0,377 + 0,353 + 0,166) = 2,002.$$

Замечание. Полученное приближенное значение интеграла мало отличается от результата, найденного с помощью формулы Ньютона — Лейбница:

$$\int_2^7 \frac{dx}{\sqrt{x+2}} = \int_2^7 (x+2)^{-1/2}\,d(x+2) = 2(x+2)^{1/2}\Big|_2^7 =$$

$$= 2\left[(7+2)^{1/2} - (2+2)^{1/2}\right] = 2.$$

Более точный результат (по сравнению с примером 1) объясняется тем, что в данном случае меньше промежуток интегрирования, а также меньше максимум модуля второй производной подынтегральной функции:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+2}},\quad f'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{(x+2)^3}},\quad f''(x)=\frac{3}{4\sqrt{(x+2)^5}},$$

$$M=\max_{2<x<7}|f(x)|=\frac{3}{128}.$$

(В примере 1 $M=\max\limits_{2<x<9}\left|\frac{2}{(x-1)^3}\right|=2.$)

3. С точностью до 0,01 вычислить $\int\limits_2^3 \frac{dx}{x-1}$.

Для определения числа n отрезков, на которые нужно разбить промежуток интегрирования, воспользуемся формулой (14.3). Неравенство $|R_n|\leqslant\varepsilon$ будет выполнено, если

$$\frac{(b-a)^3}{12n^2}M\leqslant\varepsilon,$$

откуда

$$n\geqslant\sqrt{\frac{(b-a)^3M}{12\varepsilon}}.$$

Так как $f(x)=\frac{1}{x-1}$, $f'(x)=-\frac{1}{(x-1)^2}$, $f''(x)=\frac{2}{(x-1)^3}$,

$$M=\max_{a<x<b}|f''(x)|=\max_{2<x<3}\left|\frac{2}{(x-1)^3}\right|=2,$$

то

$$n\geqslant\sqrt{\frac{(3-2)^3\,2}{12\cdot 0{,}01}}=\sqrt{\frac{1\cdot 2\cdot 100}{12}}=\sqrt{\frac{50}{3}}>\sqrt{16}=4.$$

Поскольку n — целое число, можно взять $n=5$. Определив n, найдем:

$$h=\frac{3-2}{5}=\frac{1}{5}=0{,}2;\quad x_k=2+0{,}2k\quad (k=0, 1, \ldots, 5),$$

$$x_0=2,\ x_1=2{,}2,\ x_2=2{,}4,\ x_3=2{,}6,\ x_4=2{,}8,\ x_5=3.$$

С помощью таблиц обратных величин находим $y_k=\frac{1}{x_k-1}$:

$$y_0=1,\quad y_1=\frac{1}{1{,}2}=0{,}833,\quad y_2=\frac{1}{1{,}4}=0{,}714,$$

$$y_3=\frac{1}{1{,}6}=0{,}625,\quad y_4=\frac{1}{1{,}8}=0{,}556,\quad y_5=\frac{1}{2}=0{,}500.$$

(Вычисление ведем с одним запасным десятичным знаком.)

По формуле (14.1) получаем

$$\int\limits_2^3\frac{dx}{x-1}\approx h\left(\frac{y_0}{2}+y_1+y_2+y_3+y_4+\frac{y_5}{2}\right)=$$

$$=0{,}2(0{,}500+0{,}833+0{,}714+0{,}625+0{,}556+0{,}250)=0{,}2\cdot 3{,}478=0{,}6956.$$

Замечание. Полученный результат удовлетворяет условиям поставленной задачи. Действительно,

$$\int\limits_2^3\frac{dx}{x-1}=\ln(x-1)\Big|_2^3=\ln 2-\ln 1\approx 0{,}6931,$$

$$|R_n|=|0{,}6931-0{,}6956|=0{,}0625<0{,}01.$$

14.1. По формуле трапеций вычислить интеграл $\int\limits_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$, приняв $n_1=10$, $n_2=20$. Полученный результат сравнить с точным.

В задачах 14.2—14.4 по формуле трапеций, приняв $n=10$, вычислить интеграл при указанных значениях параметра p.

14.2. $\int\limits_0^1\frac{dx}{1+px^3}$; 1) $p=1$; 2) $p=2$; 3) $p=3$; 4) $p=4$; 5) $p=5$; 6) $p=6$; 7) $p=7$; 8) $p=8$; 9) $p=9$; 10) $p=10$.

14.3. $\int\limits_0^1\frac{x^{2p}\,dx}{(1-x+x^2)^2}$; 1) $p=1$; 2) $p=2$; 3) $p=3$; 4) $p=4$; 5) $p=5$.

14.4. $\int\limits_{-0{,}2}^{0{,}4}\frac{p+x^2\sin x}{x^2-0{,}2x+0{,}51}\,dx$; 1) $p=0{,}05$; 2) $p=0{,}1$; 3) $p=0{,}15$; 4) $p=0{,}2$; 5) $p=0{,}25$; 6) $p=0{,}3$; 7) $p=0{,}35$; 8) $p=0{,}4$; 9) $p=0{,}45$; 10) $p=0{,}5$; 11) $p=0{,}55$; 12) $p=0{,}6$; 13) $p=0{,}65$; 14) $p=0{,}7$; 15) $p=0{,}75$; 16) $p=0{,}8$.

В задачах 14.5—14.10 определить, на сколько частей нужно разбить промежуток интегрирования, чтобы по формуле трапеций вычислить интеграл с точностью до 0,1.

14.5. $\int\limits_1^3\ln 2x\,dx$. **14.6.** $\int\limits_0^3\frac{dx}{x+2}$. **14.7.** $\int\limits_0^{1{,}2}e^x\,dx$.

14.8. $\int\limits_1^4 x(\ln x-1)\,dx$. **14.9.** $\int\limits_0^{1{,}2}\sin x\,dx$. **14.10.** $\int\limits_0^1 e^{3x}\,dx$.

В задачах 14.11—14.16 определить, на сколько частей нужно разбить промежуток интегрирования, чтобы по формуле трапеций вычислить интеграл с точностью до 0,001.

14.11. $\int\limits_0^{\pi/2}\cos\frac{x}{2}\,dx$. **14.12.** $\int\limits_1^3\frac{dx}{x}$. **14.13.** $\int\limits_1^3\ln 2x\,dx$.

14.14. $\int\limits_0^{1{,}2}e^x\,dx$. **14.15.** $\int\limits_1^4 x(\ln x-1)\,dx$. **14.16.** $\int\limits_0^{1{,}2}\sin x\,dx$.

В задачах 14.17—14.25 по формуле трапеций вычислить интеграл с точностью до 0,01.

14.17. $\int\limits_1^3\ln 2x\,dx$. **14.18.** $\int\limits_0^{\pi/2}\cos\frac{x}{2}\,dx$. **14.19.** $\int\limits_0^3\frac{dx}{x+2}$.

14.20. $\int\limits_1^2\frac{dx}{x}$. **14.21.** $\int\limits_1^4 x(\ln x-1)\,dx$. **14.22.** $\int\limits_0^{1{,}2}e^x\,dx$.

14.23. $\int\limits_0^{1{,}2}\sin x\,dx$. **14.24.** $\int\limits_0^2 e^{-x^2}\,dx$. **14.25.** $\int\limits_0^{1{,}2}\frac{dx}{1+x^2}$.

12. Зак. 2026

14.2. Формула парабол

Формула парабол (или *формула Симпсона*) имеет вид

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left(y_0 + 4\left(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}\right) + 2\left(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2}\right) + y_{2n}\right), \tag{14.4}$$

где $h = \dfrac{b-a}{2n}$; $x_k = a + kh$; $y_k = f(x_k)$ $(k = 0,\ 1,\ \ldots,\ 2n)$.

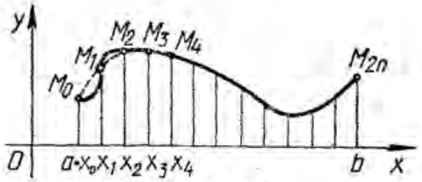


Рис. 14.2

Правая часть формулы (14.4) выражает площадь фигуры, составленной из параболических трапеций $x_0M_0M_2x_2$, $x_2M_2M_4x_4$ и т. д. (рис. 14.2). Дуга $M_0M_1M_2$ графика подынтегральной функции заменена здесь дугой параболы, проходящей через точки M_0, M_1, M_2. Аналогичная замена произведена и для остальных дуг.

Для остаточного члена формулы (14.4) выполняется неравенство

$$|R_n| \leqslant \frac{(b-a)^5 M}{180\,(2n)^4}, \tag{14.5}$$

где $M = \max\limits_{a<x<b} |f^{\text{IV}}(x)|$.

Примеры. 1. По формуле парабол вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{1+x^3}$ при $2n=10$.

Составим таблицу значений подынтегральной функции, необходимых для вычисления данного интеграла (табл. 14.1).

Таблица 14.1

k	x_k	x_k^3	y_0, y_{2n}	y_k (k — нечетное)	y_k (k — четное)
0	0	0	$y_0=1$		
1	0,1	0,001		$y_1=0,99900$	
2	0,2	0,008			$y_2=0,99206$
3	0,3	0,027		$y_3=0,97371$	
4	0,4	0,064			$y_4=0,93985$
5	0,5	0,125		$y_5=0,88889$	
6	0,6	0,216			$y_6=0,82237$
7	0,7	0,343		$y_7=0,74460$	
8	0,8	0,512			$y_8=0,66138$
9	0,9	0,729		$y_9=0,57837$	
10	1	1	$y_{10}=0,5$		
Σ			1,5	4,18457	3,41566

В последней строке табл. 14.1 находятся суммы чисел соответствующих столбцов.

Так как

$$h = \frac{1-0}{10} = 0,1,\quad 4(y_1+y_3+y_5+y_7+y_9) = 4\cdot 4,18457 = 16,73828,$$

$$2(y_2+y_4+y_6+y_8) = 2\cdot 3,41566 = 6,83132,$$

по формуле (14.4) находим

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^3} \approx \frac{h}{3}\left[y_0 + 4(y_1+y_3+y_5+y_7+y_9) + 2(y_2+y_4+y_6+\right.$$

$$\left.+ y_8) + y_{10}\right] = \frac{1}{30}(1 + 16,73828 + 6,83132 + 0,5) = 0,83565.$$

2. По формуле парабол вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \dfrac{\sin x}{x}\,dx$ при $2n=10$.

Составим таблицу соответствующих значений функции (табл. 14.2).

Таблица 14.2

k	x_k	$\sin x_k$	y_0, y_{2n}	y_k (k—нечетное)	y_k (k — четное)
0	0	0	$y_0=1$		
1	0,1	0,09985		$y_1=0,99850$	
2	0,2	0,19867			$y_2=0,99335$
3	0,3	0,29552		$y_3=0,98507$	
4	0,4	0,38942			$y_4=0,97355$
5	0,5	0,47943		$y_5=0,95886$	
6	0,6	0,56464			$y_6=0,94107$
7	0,7	0,64422		$y_7=0,92031$	
8	0,8	0,71736			$y_8=0,89670$
9	0,9	0,78333		$y_9=0,87037$	
10	1	0,84147	$y_{10}=0,84147$		
Σ			1,84147	4,73311	3,80467

Поскольку

$$h = \frac{1-0}{10} = 0,1,\ 4(y_1+y_3+y_5+y_7+y_9) = 4\cdot 4,73311 = 18,93244,$$

$$2(y_2+y_4+y_6+y_8) = 7,60934,$$

по формуле (14.4) получаем

$$\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx \approx \frac{h}{3}\left[y_0 + y_{10} + 4(y_1+y_3+y_5+y_7+y_9) + 2(y_2+y_4+\right.$$

$$\left.+ y_6 + y_8)\right] = \frac{1}{30}(1,84147 + 18,93244 + 7,60934) = 0,94611.$$

Замечание. Соответствующий неопределенный интеграл $\int \frac{\sin x}{x}\,dx$ является «неберущимся» интегралом. Так как первообразная подынтегральной функции в данном случае не выражается в элементарных функциях, то формулу Ньютона — Лейбница применить нельзя.

3. По формуле парабол с точностью до 0,0001 вычислить

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}.$$

Воспользуемся формулой (14.5). Неравенство $|R_n| \leqslant \varepsilon$ будет выполнено, когда

$$\frac{(b-a)^5 M}{180\,(2n)^4} \leqslant \varepsilon,$$

т. е. при

$$2n \geqslant \sqrt[4]{\frac{(b-a)^5 M}{180\varepsilon}}. \qquad (14.6)$$

Найдем значение $M = \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |f^{IV}(x)|$. Так как

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2},\ f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2},\ f''(x) = -2\frac{1-3x^2}{(1+x^2)^3},$$

$$f'''(x) = \frac{24(x-x^3)}{(1+x^2)^4},\quad f^{IV}(x) = \frac{24(5x^4-10x^2+1)}{(1+x^2)^5},$$

то $M = \max\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f^{IV}(x)| = 24$. (Максимум модуля четвертой производной найден с помощью производной $f^{V}(x) = \frac{-240(3x^4-10x^2+3)}{(1+x^2)^6}$.)

Подставим в формулу (14.6) значения входящих в нее величин $a = 0$, $b = 1$, $M = 24$, $\varepsilon = 0{,}0001$:

$$2n \geqslant \sqrt[4]{\frac{(1-0)^5\, 24}{180\cdot 0{,}0001}} = \sqrt[4]{\frac{24\cdot 10000}{180}} = \sqrt[4]{\frac{4000}{3}} \approx \sqrt[4]{1334} \approx 6{,}07.$$

Поскольку $2n$ — целое и четное число, можно взять $2n = 8$. Замечая, что $h = \frac{b-a}{2n} = \frac{1-0}{8} = 0{,}125$, составляем таблицу значений $y_k = \frac{1}{1+x_k^2}$ (табл. 14.3).

Таблица 14.3

k	x_k	$1+x_k^2$	y_0, y_{2n}	y_k (k — нечетное)	y_k (k — четное)
0	0	1	1		
1	0,125	1,01563		$y_1 = 0{,}98461$	
2	0,250	1,06250			$y_2 = 0{,}94118$
3	0,375	1,14063		$y_3 = 0{,}87670$	
4	0,500	1,25000			$y_4 = 0{,}80000$
5	0,625	1,39063		$y_5 = 0{,}71910$	
6	0,750	1,56250			$y_6 = 0{,}64000$
7	0,875	1,76563		$y_7 = 0{,}56637$	
8	1,000	2	0,50000		
Σ			1,50000	3,14678	2,38118

По формуле (14.4) получаем

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{h}{3}\,[y_0 + 4(y_1+y_3+y_5+y_7) + 2(y_2+y_4+y_6) + y_8] =$$

$$= \frac{1}{24}(1 + 4\cdot 3{,}14678 + 2\cdot 2{,}38118 + 0{,}5) =$$

$$= \frac{1}{24}(1 + 12{,}58712 + 4{,}76236 + 0{,}5) = \frac{18{,}84948}{24} = 0{,}785395.$$

В задачах 14.26—14.29 по формуле парабол, приняв $2n = 10$, вычислить интеграл при указанных значениях параметра p.

14.26. $\int_0^1 \frac{dx}{1+px}$; 1) $p = 1$; 2) $p = 2$; 3) $p = 3$; 4) $p = 4$; 5) $p=5$; 6) $p = 6$; 7) $p = 7$; 8) $p = 8$; 9) $p = 9$; 10) $p = 10$.

14.27. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+px}\,dx$; 1) $p=1$; 2) $p=2$; 3) $p=3$; 4) $p=4$; 5) $p=5$; 6) $p = 6$; 7) $p = 7$; 8) $p = 8$; 9) $p = 9$; 10) $p = 10$.

14.28. $\int_{-1}^1 \frac{(0{,}05e^{0{,}8p^2x^2} - p^4x^6)^2}{0{,}4 + 0{,}03p^2 - 0{,}05x^5}\,dx$; 1) $p = 0$; 2) $p = 0{,}05$; 3) $p = 0{,}1$; 4) $p = 0{,}15$; 5) $p = 0{,}2$; 6) $p = 0{,}25$; 7) $p = 0{,}3$; 8) $p = 0{,}35$; 9) $p = 0{,}4$; 10) $p = 0{,}45$; 11) $p = 0{,}5$; 12) $p = 0{,}55$; 13) $p = 0{,}6$; 14) $p = 0{,}65$; 15) $p = 0{,}7$; 16) $p = 0{,}75$; 17) $p = 0{,}8$; 18) $p = 0{,}85$; 19) $p = 0{,}9$; 20) $p = 0{,}95$.

14.29. $\int_0^1 \frac{dx}{p^2+x^2}$; 1) $p=0{,}5$; 2) $p=1$; 3) $p = 2$; 4) $p = 3$; 5) $p=4$; 6) $p = 5$; 7) $p = 6$; 8) $p = 7$; 9) $p = 8$; 10) $p = 9$; 11) $p = 10$.

В задачах 14.30—14.39 вычислить интеграл по формуле парабол, приняв $2n = 10$.

14.30. $\int_0^2 \frac{dx}{x^3+4}$. **14.31.** $\int_0^1 \frac{dx}{x^3+1}$. **14.32.** $\int_0^3 \sqrt{x^2+1}\,dx$.

14.33. $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$. **14.34.** $\int_0^2 \frac{\sin x}{1+x}\,dx$. **14.35.** $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$.

14.36. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+3\sin^2 t}\,dt$. **14.37.** $\int_0^{\pi/2} \sqrt{4-3\cos^2 t}\,dt$.

14.38. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{9+16\sin^2 t}\,dt$. **14.39.** $\int_0^{\pi/2} \sqrt{100-64\cos^2 t}\,dt$.

В задачах 14.40—14.45 определить, на сколько частей нужно разбить промежуток интегрирования, чтобы вычислить с указанной точностью ε_k, $k = 1, 2, 3$.

14.40. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x\,dx$; $\varepsilon_1 = 0{,}001$, $\varepsilon_2 = 0{,}0001$, $\varepsilon_3 = 0{,}00001$.

14.41. $\int\limits_1^2 e^x\,dx$; $\varepsilon_1 = 0{,}001$, $\varepsilon_2 = 0{,}0001$, $\varepsilon_3 = 0{,}00001$.

14.42. $\int\limits_0^{\pi/2} \cos \frac{x}{2}\,dx$; $\varepsilon_1 = 0{,}0001$, $\varepsilon_2 = 0{,}00001$, $\varepsilon_3 = 0{,}000001$.

14.43. $\int\limits_0^3 \frac{dx}{x+2}$; $\varepsilon_1 = 0{,}001$, $\varepsilon_2 = 0{,}0001$, $\varepsilon_3 = 0{,}00001$.

14.44. $\int\limits_1^3 \ln 2x\,dx$; $\varepsilon_1 = 0{,}001$, $\varepsilon_2 = 0{,}0001$, $\varepsilon_3 = 0{,}00001$.

14.45. $\int\limits_3^4 x(\ln x - 1)\,dx$; $\varepsilon_1 = 0{,}0001$, $\varepsilon_2 = 0{,}00001$, $\varepsilon_3 = 0{,}000001$.

В задачах 14.46—14.51 вычислить интеграл с точностью до 0,001.

14.46. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x\,dx$. **14.47.** $\int\limits_1^2 e^x\,dx$. **14.48.** $\int\limits_0^{\pi/2} \cos \frac{x}{2}\,dx$.

14.49. $\int\limits_0^3 \frac{dx}{x+2}$. **14.50.** $\int\limits_1^3 \ln 2x\,dx$. **14.51.** $\int\limits_3^4 x(\ln x - 1)\,dx$.

VI. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

15. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Теория матриц находит широкое применение в современной науке: физической химии, теоретической физике, электродинамике, квантовой механике, а также при решении разнообразных прикладных проблем (планирование, управление производством и др.).

15.1. Матрицы и действия над ними

Матрицей называется система $m \times n$ чисел, расположенных в прямоугольной таблице из m строк и n столбцов. Числа этой таблицы называются *элементами матрицы*. Обозначения матрицы:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Элементы $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ составляют i-ю строку ($i = 1, 2, \ldots, m$) матрицы, элементы $a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{mk}$ — ее k-й столбец ($k = 1, 2, \ldots, n$); a_{ik} — элемент, принадлежащий i-й строке и k-му столбцу матрицы; числа i, k называются *индексами элемента*.

Матрицу, имеющую m строк и n столбцов, называют *матрицей размеров* $m \times n$ (читается «m на n»).

Употребляются и более краткие обозначения матрицы размеров $m \times n$: $[a_{ik}]_{m\times n}$, $\|a_{ik}\|_{m\times n}$, $(a_{ik})_{m\times n}$. Матрицу обозначают также одной заглавной буквой, например:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Если необходимо отметить, что матрица A имеет m строк и n столбцов, т. е. необходимо указать ее размеры, то пишут $A_{m\times n}$ или A_{mn}.

Две матрицы $A_{mn} = (a_{ik})_{mn}$, $B_{pq} = (b_{ik})_{pq}$ называются *равными*, если $p = m$, $q = n$ и $a_{ik} = b_{ik}$ ($i = 1, 2, \ldots, m$; $k = 1, 2, \ldots, n$); другими словами, если они имеют одинаковые размеры и их соответствующие элементы равны.

Матрица, состоящая лишь из одной строки, называется *строчной матрицей* или *матрицей-строкой*. Матрица, имеющая лишь один столбец, называется *столбцевой матрицей* или *матрицей-столбцом*.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой*.

Квадратной называется матрица, у которой число строк равно числу столбцов ($m = n$), т. е. матрица вида

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Порядком квадратной матрицы называется число ее строк (или столбцов).

Будем говорить, что элементы $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ квадратной матрицы образуют ее *главную диагональ*, а элементы $a_{1n}, a_{2n-1}, \ldots, a_{n1}$ — вторую диагональ.

Диагональной называется квадратная матрица, у которой все элементы, не принадлежащие главной диагонали, равны нулю.

Единичная матрица — это диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице.

Линейными действиями над матрицами называются сложение и вычитание матриц, умножение матрицы на число. Сложение и вычитание определяются только для матриц одинаковых размеров.

Суммой матриц $A = (a_{ik})_{mn}$, $B = (b_{ik})_{mn}$ называется такая матрица $C = (c_{ik})_{mn}$, что

$$c_{ik} = a_{ik} + b_{ik} \quad (i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, n),$$

т. е. матрица, элементы которой равны суммам соответствующих элементов матриц-слагаемых. Сумма двух матриц A и B обозначается $A + B$.

Разностью $A - B$ *матриц* $A = (a_{ik})_{mn}$, $B = (b_{ik})_{mn}$ называется матри $D = (d_{ik})_{mn}$, для которой

$$d_{ik} = a_{ik} - b_{ik} \quad (i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, n).$$

Произведением матрицы $A = (a_{ik})_{mn}$ *на число* α (или *числа* α *на матрицу*
называется матрица $B = (b_{ik})_{mn}$, для которой

$$b_{ik} = \alpha a_{ik} \quad (i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, n),$$

т. е. матрица, полученная из данной умножением всех ее элементов на число
Произведение матрицы A на число α обозначается $A\alpha$ или αA.

Произведение матриц определяется для квадратных матриц одного и того
порядка, а также для неквадратных матриц, у которых число столбцов матриц
множимого равно числу строк матрицы-множителя.

Произведением матрицы $A_{mn} = (a_{ik})_{mn}$ *на матрицу* $B_{nl} = (b_{ik})_{nl}$ называет
такая матрица $C_{ml} = (c_{ik})_{ml}$, для которой

$$c_{ik} = a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \ldots + a_{in} b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}, \tag{15.1}$$

т. е. элемент c_{ik} матрицы C_{ml} равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A_{mn} на соответствующие элементы k-го столбца матрицы B_{nl}. Матрица C_{ml} имеет m строк (как и матрица A_{mn}) и l столбцов (как и матрица B_{nl}). Произведение матрицы A на матрицу B обозначается AB.

З а м е ч а н и е. Из того, что матрицу A можно умножить на B, не следует, что матрицу B можно умножить на A. В общем случае $AB \neq BA$. Если $AB = BA$, то матрицы A и B называются *перестановочными*.

П р и м е р ы. 1. Найти сумму и разность двух матриц:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

В соответствии с определениями суммы и разности получаем:

$$A + B = \begin{bmatrix} 3+1 & 5+2 \\ 7+5 & 9+7 \\ 6+4 & 8+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 12 & 16 \\ 10 & 14 \end{bmatrix}, \quad A - B = \begin{bmatrix} 3-1 & 5-2 \\ 7-5 & 9-7 \\ 6-4 & 8-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. Даны две матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Определить $2A - 3B$.

Находим $2A$, $-3B$ и $2A - 3B = 2A + (-3B)$:

$$2A = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 12 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad -3B = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -6 & 9 \\ -9 & 6 \end{bmatrix}, \quad 2A - 3B = \begin{bmatrix} 5 & 13 \\ 6 & 11 \\ -5 & 12 \end{bmatrix}.$$

3. Даны две матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & 0 & -3 \\ 6 & 0 & 7 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \\ 3 & -2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Найти произведение AB. Можно ли получить произведение BA?

Число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B («ширина» матрицы A равна «высоте» матрицы B), поэтому произведение AB определено. Умножая строку матрицы A на столбец матрицы B, по формуле (15.1) получаем

$$AB = \begin{bmatrix} 1\cdot2 + 3\cdot5 + 2\cdot3 + (-1)\cdot0 & 1\cdot1 + 3\cdot4 + 2\cdot(-2) + (-1)\cdot(-3) \\ 4\cdot2 + 5\cdot5 + 0\cdot3 + (-3)\cdot0 & 4\cdot1 + 5\cdot4 + 0\cdot(-2) + (-3)\cdot(-3) \\ 6\cdot\ \ + 0\cdot5 + 7\cdot3 + (-2)\cdot0 & 6\cdot1 + 0\cdot4 + 7\cdot(-2) + (-2)\cdot(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 & 12 \\ 33 & 33 \\ 33 & -2 \end{bmatrix}$$

Произведение BA не определено, так как число столбцов матрицы B не равно числу строк матрицы A.

15.1. Найти сумму и разность двух матриц:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 4 & -5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 7 & 8 & -9 \end{bmatrix}.$$

15.2. Найти сумму трех матриц:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -7 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -5 & -3 \\ 1 & -4 & -8 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -3 & 3 & -8 \\ -2 & 5 & -6 \end{bmatrix}.$$

15.3. Даны три матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 3 & -7 \\ 6 & -8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 6 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \\ 7 & -6 \end{bmatrix}.$$

Найти: 1) $A+B+C$; 2) $A-B-C$; 3) $3A-2B+C$; 4) $2A+4B-3C$.

15.4. Дана матрица $A = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 6 & -9 \end{bmatrix}$. Найти матрицу X, удовлетворяющую условию: 1) $2A-X = O$; 2) $3A+X = O$; 3) $2A+3X = O$, где O — нулевая матрица.

15.5. Дана матрица $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$. Найти матрицу X, удовлетворяющую условию: 1) $A + X = E$; 2) $3A - 2X = E$, где E — единичная матрица.

15.6. Даны матрицы:

$$A=\begin{bmatrix}1 & -3\\ 5 & -7\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-2 & 4\\ -6 & 8\end{bmatrix}.$$

Найти матрицу X, удовлетворяющую условию: 1) $A+X=B$; 2) $B-2X=0$; 3) $3A-0{,}5X=B$.

15.7. Известно, что $A_{34}B_{45}=C_{ml}$. Чему равны m и l — размеры матрицы C?

15.8. Известно, что $A_{23}B_{nl}=C_{24}$. Найти n и l.

15.9. Известно, что $A_{5n}B_{k6}=C_{56}$. Найти зависимость между n и k.

15.10. Даны матрицы: A_{33}, B_{34}, C_{43}. Существуют ли произведения: 1) AB; 2) BA; 3) BC; 4) CB; 5) AC; 6) CA?

15.11. Даны матрицы:

$$A=\begin{bmatrix}1 & -3\\ 2 & -4\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}3 & -2 & -1\\ 5 & -4 & -7\end{bmatrix},$$

$$C=\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ 3 & 1 & -5\\ 6 & 4 & -8\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}4\\ 9\\ 6\end{bmatrix}.$$

Существуют ли произведения: 1) AB; 2) BA; 3) BC; 4) CB; 5) CD; 6) DC; 7) AC; 8) CA; 9) BD; 10) DB?

15.12. Найти произведение AB, если:

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{bmatrix}.$$

15.13. Найти произведения AB и BA матриц:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 4 & 0 & -1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & -4\\ 0 & -5\end{bmatrix}.$$

15.14. Доказать, что перестановочны матрицы:

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & -5\\ 2 & -4\end{bmatrix}.$$

15.15. Даны матрицы:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -4 & 8\\ 2 & 5 & -3 & 0\\ 3 & 0 & -2 & 9\\ 4 & 6 & -1 & 0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0 & 8\\ 9 & 6\\ 5 & 4\\ 1 & 2\end{bmatrix}.$$

Найти элемент матрицы AB, принадлежащий ее четвертой строке и первому столбцу.

15.16. Даны две матрицы:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & -1\\ 0 & 4 & 5 & -2\\ 7 & 1 & 0 & -3\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}5 & -4\\ 3 & -2\\ 1 & -5\\ 9 & -7\end{bmatrix}.$$

Найти произведение AB. Существует ли произведение BA?

В задачах 15.17—15.26 найти произведение матриц.

15.17. $\begin{bmatrix}4 & -5 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 3\\ 1\end{bmatrix}.$

15.18. $\begin{bmatrix}4\\ 6\\ 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3 & -2 & 1\end{bmatrix}.$

15.19. $\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{bmatrix}.$

15.20. $\begin{bmatrix}2 & -2\\ 2 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}.$

15.21. $\begin{bmatrix}5 & -6\\ 7 & -8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}.$

15.22. $\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 7 & -6 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 6 & 0\\ 0 & 9\end{bmatrix}.$

15.23. $\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -3\\ 5 & -7\\ 6 & -8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & -1\\ 5 & -2\end{bmatrix}.$

15.24. $\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 8 & 0\\ 4 & 0 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 4 & 0\\ 6 & 0 & 7\\ 0 & 8 & 0\end{bmatrix}.$

15.25. $\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & -2 & 3\\ 5 & -4 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 4 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$

15.26. $\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 1 & -2 & 4\\ 0 & -3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 3 & -5 & 6\\ 2 & -4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}.$

В задачах 15.27—15.30 записать в матричной форме систему уравнений.

15.27. $\begin{cases}3x+4y=7,\\ 5x-2y=3.\end{cases}$

15.28. $\begin{cases}2x_1+3x_2=9,\\ 3x_1+2x_2=11.\end{cases}$

15.29. $\begin{cases}2x+3y+5z=11,\\ 7x+4y-6z=5,\\ 8x-5y+3z=6.\end{cases}$

15.30. $\begin{cases}4x_1+3x_2+2x_3=9,\\ 5x_1-2x_2+4x_3=7,\\ 6x_1+7x_2-8x_3=5.\end{cases}$

В задачах 15.31—15.36 найти произведения AB и BA двух квадратных матриц.

15.31. $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$.

15.32. $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

15.33. $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 4 & -8 & 7 \\ 6 & 1 & -9 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

15.34. $A=\begin{bmatrix} 5 & 3 & -7 \\ -1 & 6 & -3 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & -6 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

15.35. $A=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

15.36. $A=\begin{bmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{bmatrix}$.

В задачах 15.37, 15.38 найти произведения AB и BA двух прямоугольных матриц.

15.37. $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$.

15.38. $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \\ 1 & -3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$.

15.2. Определители и их свойства

Определителем квадратной матрицы второго порядка

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

называется число, равное $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ и обозначаемое

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Числа a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} называются *элементами определителя матрицы второго порядка.* Каждый элемент определителя обозначают буквой a с двумя индексами; первый указывает номер строки, второй — номер столбца, на пересе-

чении которых находится соответствующий элемент (например, элемент a_{21} принадлежит второй строке и первому столбцу определителя).

Определитель квадратной матрицы называют также *детерминантом.* Для определителя матрицы A употребляются следующие обозначения: $|A|$, Δ, $\det A$, $\det(a_{ik})$.

Определителем квадратной матрицы третьего порядка

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

называют число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{23}a_{32}a_{11}.$$

Заметим, что каждое слагаемое алгебраической суммы в правой части последней формулы представляет собой произведение элементов определителя, взятых по одному и только по одному из каждой строки и каждого столбца. Этому произведению приписывается соответствующий знак. Для того чтобы различать, какие произведения следует брать со знаком плюс, а какие со знаком минус, полезно знать правило, схематически изображенное на рис. 15.1.

Минором какого-либо *элемента определителя* называется определитель, полученный из исходного вычеркиванием той строки и того столбца, которым принадлежит данный элемент. Минор элемента a_{ik} обозначают M_{ik}.

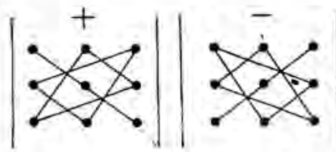


Рис. 15.1

Алгебраическим дополнением элемента a_{ik} определителя называется его минор, умноженный на $(-1)^{i+k}$. Алгебраическое дополнение элемента a_{ik} будем обозначать A_{ik}. В соответствии с определением $A_{ik}=(-1)^{i+k}M_{ik}$.

Определители матриц второго и третьего порядка называются также *определителями второго и третьего порядка.*

Свойства определителей:

1) определитель не изменяется при замене всех его строк соответствующими столбцами;

2) при перестановке двух строк (столбцов) определитель меняет лишь знак;

3) определитель с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю;

4) множитель, общий для всех элементов некоторой строки (столбца), можно вынести за знак определителя;

5) определитель равен нулю, если все элементы некоторой строки (столбца) равны нулю;

6) определитель не изменится, если к элементам некоторой строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), предварительно умножив их на один и тот же множитель;

7) определитель равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

Свойство 7 можно выразить, например, формулой:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Данная формула представляет собой разложение определителя третьего порядка по элементам первой строки.

По аналогии с последней формулой вводятся определители четвертого порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}, \qquad (15.2)$$

определители пятого порядка и т. д.

Примеры. 1. Вычислить определитель третьего порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -5 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Пользуясь определением, получаем

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -5 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 2(-5)1 + 1\cdot 1(-2) + 4(-3)3 - 3(-5)(-2) - 1\cdot 4\cdot 1 - 1(-3)2 = \\ = -10 - 2 - 36 - 30 - 4 + 6 = -76.$$

2. Вычислить определитель третьего порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} 112 & 225 & 335 \\ 121 & 243 & 362 \\ 133 & 267 & 400 \end{vmatrix}.$$

Преобразуем сначала данный определитель, воспользовавшись его свойствами. Прибавив ко второму столбцу первый, умноженный на -2, а затем к третьему столбцу первый, умноженный на -3, получим

$$\begin{vmatrix} 112 & 225 & 335 \\ 121 & 243 & 362 \\ 133 & 267 & 400 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 112 & 1 & 335 \\ 121 & 1 & 362 \\ 133 & 1 & 400 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 112 & 1 & -1 \\ 121 & 1 & -1 \\ 133 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Прибавим второй столбец последнего определителя к его третьему столбцу:

$$\begin{vmatrix} 112 & 1 & -1 \\ 121 & 1 & -1 \\ 133 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 112 & 1 & 0 \\ 121 & 1 & 0 \\ 133 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Разложив полученный определитель по элементам третьего столбца, найдем

$$\Delta = \begin{vmatrix} 112 & 1 & 0 \\ 121 & 1 & 0 \\ 133 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 112 & 1 \\ 121 & 1 \end{vmatrix} = 2(112 - 121) = -18.$$

3. Вычислить определитель четвертого порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

По формуле (15.2) находим

$$\Delta = 6\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Вычислив каждый из определителей третьего порядка, получим

$$\Delta = 6\cdot 18 - 3\cdot 12 + 4\cdot 6 - 5\cdot 12 = 108 - 36 + 24 - 60 = 36.$$

Замечание. Этот определитель можно вычислить, воспользовавшись его свойствами:

$$\begin{vmatrix} 6 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -9 & -14 & -1 \\ 0 & -3 & -4 & 1 \\ 0 & -3 & -8 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} -9 & -14 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -8 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -1\begin{vmatrix} -12 & -18 & 0 \\ -3 & -4 & 1 \\ -6 & -12 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(-1)\begin{vmatrix} -12 & -18 \\ -6 & -12 \end{vmatrix} = 6\cdot 6\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 36(4-3) = 36.$$

(Второй определитель четвертого порядка получен из первого умножением четвертой строки поочередно на -6, -2, -3 и прибавлением ее соответственно к первой, второй, третьей строкам.)

В задачах 15.39—15.44 вычислить определитель второго порядка.

15.39. $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 6 \end{vmatrix}$. **15.40.** $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 9 & 3 \end{vmatrix}$. **15.41.** $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix}$.

15.42. $\begin{vmatrix} 51 & 52 \\ 47 & 48 \end{vmatrix}$. **15.43.** $\begin{vmatrix} 63 & 62 \\ 75 & 74 \end{vmatrix}$. **15.44.** $\begin{vmatrix} 24 & 26 \\ 33 & 35 \end{vmatrix}$.

В задачах 15.45—15.48 решить уравнение.

15.45. $\begin{vmatrix} x & 8 \\ 3 & 12 \end{vmatrix} = 0.$ **15.46.** $\begin{vmatrix} x & -2 \\ -2 & x \end{vmatrix} = 0.$

15.47. $\begin{vmatrix} x^2 & 3x \\ 3 & x \end{vmatrix} = 0.$ **15.48.** $\begin{vmatrix} x & 2 \\ x & x \end{vmatrix} = 0.$

В задачах 15.49—15.54 вычислить определитель третьего порядка (использовав определение).

15.49. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$. **15.50.** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$. **15.51.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

15.52. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$. **15.53.** $\begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$. **15.54.** $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$.

В задачах 15.55—15.63 вычислить определитель третьего порядка (использовав свойства определителей).

15.55. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 8 & 9 & 7 \end{vmatrix}$. **15.56.** $\begin{vmatrix} 9 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$. **15.57.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

15.58. $\begin{vmatrix} 13 & 12 & 11 \\ 24 & 23 & 22 \\ 35 & 34 & 33 \end{vmatrix}$. **15.59.** $\begin{vmatrix} 46 & 40 & 30 \\ 57 & 54 & 55 \\ 68 & 65 & 66 \end{vmatrix}$.

15.60. $\begin{vmatrix} 58 & 63 & 59 \\ 69 & 73 & 71 \\ 77 & 81 & 79 \end{vmatrix}$. **15.61.** $\begin{vmatrix} 132 & 135 & 137 \\ 243 & 244 & 246 \\ 354 & 355 & 357 \end{vmatrix}$.

15.62. $\begin{vmatrix} 119 & 125 & 122 \\ 428 & 431 & 429 \\ 579 & 582 & 580 \end{vmatrix}$. **15.63.** $\begin{vmatrix} 251 & 125 & 126 \\ 363 & 181 & 182 \\ 574 & 288 & 289 \end{vmatrix}$.

В задачах 15.64—15.69 решить уравнение.

15.64. $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 1 & x & 2 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix} = 0.$ **15.65.** $\begin{vmatrix} 1 & 7 & x \\ 8 & x & 8 \\ x & 2 & x \end{vmatrix} = 0.$ **15.66.** $\begin{vmatrix} 3 & 2 & x \\ 1 & x & 1 \\ x & 2 & x \end{vmatrix} = 0.$

15.67. $\begin{vmatrix} x & -2 & 1 \\ x & x & 1 \\ 9 & 9 & x \end{vmatrix} = 0.$ **15.68.** $\begin{vmatrix} 2 & x & 1 \\ x & 2 & 1 \\ 3 & 4 & x \end{vmatrix} = 0.$ **15.69.** $\begin{vmatrix} x & 4 & 5 \\ 3 & -1 & x \\ 3 & x & -1 \end{vmatrix} = 0.$

В задачах 15.70—15.75 вычислить определитель четвертого порядка.

15.70. $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}$. **15.71.** $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

15.72. $\begin{vmatrix} 6 & 4 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$. **15.73.** $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

15.74. $\begin{vmatrix} 4 & 6 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$. **15.75.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \end{vmatrix}$.

15.3. Обратная матрица. Ранг матрицы

Квадратная матрица A^{-1} называется *обратной* квадратной матрице A, если выполняется условие

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E,$$

где E — единичная матрица.

Квадратная матрица называется *невырожденной* или *неособенной*, если ее определитель отличен от нуля. Если определитель матрицы равен нулю, она называется *вырожденной* или *особенной*.

Всякая невырожденная матрица

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

имеет обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}, \qquad (15.3)$$

где A_{ik} — алгебраическое дополнение элемента a_{ik} матрицы A. (Алгебраические дополнения элементов каждой строки матрицы A в формуле (15.3) записаны в столбец с тем же номером.)

Рангом матрицы называется наивысший из порядков ее миноров, отличных от нуля.

Примеры. 1. Дана матрица $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$. Найти обратную ей матрицу A^{-1}.

Воспользуемся формулой (15.3), суть которой заключается в следующем. Чтобы найти матрицу, обратную данной, необходимо: 1) вычислить определитель данной матрицы; 2) найти алгебраические дополнения A_{ik} ее элементов a_{ik}; 3) составить матрицу A' из алгебраических дополнений A_{ik}, взятых в том же порядке, что и элементы a_{ik} в матрице A; 4) в матрице A', поменяв ролями строки и столбцы, получить матрицу A^*; 5) каждый элемент матрицы A^* разделить на определитель матрицы A.

В данном примере

$$a_{11} = 1,\ a_{12} = 4,\ a_{21} = 2,\ a_{22} = 7,$$

$$A_{11} = 7,\ A_{12} = -2,\ A_{21} = -4,\ A_{22} = 1,\ \det A = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A' = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} A^* = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Замечание. Для проверки правильности вычислений можно воспользоваться равенством $AA^{-1} = E$, где E — единичная матрица. Действительно, согласно определению произведения матриц, получим

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7+8 & 4+(-4) \\ -14+14 & 8+(-7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Найти матрицу A^{-1}, обратную матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

Вычислим определитель матрицы A и алгебраические дополнения ее элементов:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1(1-2) = 1,$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Составляем матрицы A' и A^*:

$$A' = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^* = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

З а м е ч а н и е. Для контроля вычислений покажем, что $AA^{-1} = E$. Действительно,

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2-3+2 & 0+1-1 & -1+1+0 \\ 4-6+2 & 0+2-1 & -2+2+0 \\ 2-6+4 & 0+2-2 & -1+2+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -4 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & -2 & 4 \\ 5 & 2 & 0 & -1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Умножая первую строку матрицы A поочередно на $-2, -4, -5$ и прибавляя

полученный результат соответственно ко второй, третьей и четвертой строкам, имеем:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -4 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & -2 & 4 \\ 5 & 2 & 0 & -1 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} (-2) \quad (-4) \quad (-5) \\ + \\ + \\ + \end{matrix} \to$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & -6 & -4 \\ 0 & -3 & 5 & -6 & -4 \\ 0 & -3 & 5 & -6 & -4 \end{bmatrix}.$$

Полученную матрицу подвергаем дальнейшим элементарным преобразованиям:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & -6 & -4 \\ 0 & -3 & 5 & -6 & -4 \\ 0 & -3 & 5 & -6 & -4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ (-1) \quad (-1) \\ + \\ + \end{matrix} \to$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Данная матрица приведена к диагональной форме, ее ранг равен двум.

В задачах 15.76—15.82 выяснить, имеет ли данная матрица обратную.

15.76. $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$. **15.77.** $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$. **15.78.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$. **15.79.** $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$.

15.80. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$. **15.81.** $\begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix}$. **15.82.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

В задачах 15.83—15.89 выяснить, при каких значениях α существует матрица, обратная данной.

15.83. $\begin{bmatrix} \alpha & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$. **15.84.** $\begin{bmatrix} 4 & 10 \\ \alpha & 5 \end{bmatrix}$. **15.85.** $\begin{bmatrix} 4 & \alpha \\ \alpha & 9 \end{bmatrix}$. **15.86.** $\begin{bmatrix} \alpha & 2 \\ 8 & \alpha \end{bmatrix}$.

15.87. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ \alpha & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$. **15.88.** $\begin{bmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. **15.89.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

В задачах 15.90—15.102 найти обратную матрицу для данной матрицы.

15.90. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. **15.91.** $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$. **15.92.** $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$. **15.93.** $\begin{bmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}$.

15.94. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 13 & 10 & 8 \end{bmatrix}$. **15.95.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 7 & 3 & 10 \\ 15 & 6 & 20 \end{bmatrix}$. **15.96.** $\begin{bmatrix} 9 & 17 & 8 \\ 18 & 34 & 17 \\ 10 & 19 & 8 \end{bmatrix}$.

15.97. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 8 & 9 & 7 \end{bmatrix}$. **15.98.** $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}$.

15.99. $\begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix}$. **15.100.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

15.101. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 5 & 2 \\ 3 & -2 & 6 & 3 \\ 3 & -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$. **15.102.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 9 & 4 \\ 5 & 4 & 10 & 5 \end{bmatrix}$.

В задачах 15.103—15.114 найти ранг матрицы.

15.103. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. **15.104.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$.

15.105. $\begin{bmatrix} 13 & 12 & 11 \\ 24 & 23 & 22 \\ 35 & 34 & 33 \end{bmatrix}$. **15.106.** $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 9 & 10 & 4 \\ 1 & 5 & 6 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$.

15.107. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$. **15.108.** $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

15.109. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 8 & 7 \\ 7 & 19 & 12 & 1 & 6 \end{bmatrix}$. **15.110.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -4 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & -2 & 4 \\ 5 & 2 & 0 & -1 & 6 \end{bmatrix}$.

15.111. $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$. **15.112.** $\begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{bmatrix}$.

15.113. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & 3 & -4 & -5 & 2 \\ 3 & -4 & 1 & 4 & -3 \end{bmatrix}$. **15.114.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 2 & 8 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 3 & -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$.

16. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Линейным алгебраическим уравнением называют уравнение, содержащее переменную только в первой степени и не имеющее произведений переменных. При решении систем линейных уравнений используются определители и матрицы.

16.1. Решение систем уравнений с помощью определителей

Рассмотрим систему n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n. \end{aligned}\right\} \tag{16.1}$$

Если хотя бы один из свободных членов $b_i \neq 0$, то система уравнений (16.1) называется *неоднородной*. Если все свободные члены $b_i = 0$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), то данная система уравнений называется *однородной* и имеет вид

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{16.2}$$

Решением системы линейных алгебраических уравнений (16.1) называется такое множество значений неизвестных $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, $\ldots$, $x_n = c_n$, при которых каждое из уравнений данной системы обращается в тождество.

Система уравнений, имеющая решения, называется *совместной*, а система уравнений, не имеющая решений,— *несовместной*.

Определителем системы уравнений (16.1) или (16.2) называется определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных данной системы уравнений, т. е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Если определитель неоднородной системы уравнений отличен от нуля, т. е. $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, определяемое формулами:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \; \dots, \; x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \tag{16.3}$$

где Δ_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ — определитель, полученный из определителя исходной системы заменой i-го столбца столбцом свободных членов.

Однородная система уравнений всегда совместна, так как имеет нулевое решение $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. Ненулевые решения она имеет тогда и только тогда, когда $\Delta = 0$.

Примеры. 1. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} 4x_1 - 3x_2 &= 17, \\ 2x_1 + 5x_2 &= -11. \end{aligned}\right\}$$

Вычисляем определитель системы и определители Δ_1, Δ_2:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 26, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 17 & -3 \\ -11 & 5 \end{vmatrix} = 52,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 17 \\ 2 & -11 \end{vmatrix} = -78.$$

Поскольку $\Delta \neq 0$, по формулам (16.3) находим:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{52}{26} = 2, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-78}{26} = -3.$$

Система имеет единственное решение: $x_1 = 2$, $x_2 = -3$.

2. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 2, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1. \end{aligned}\right\}$$

Находим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 8 + 27 - 6 - 6 - 6 = 18.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение. Чтобы получить его, необходимо вычислить определители Δ_1, Δ_2, Δ_3:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 27 + 4 - 3 - 6 - 12 = 12,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 8 + 9 - 18 - 6 - 2 = -6,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 12.$$

По формулам (16.3) находим:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}, \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-6}{18} = -\frac{1}{3}, \; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}.$$

В задачах 16.1—16.6 с помощью определителей решить систему уравнений.

16.1. $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 = 5, \\ 5x_1 + 2x_2 = 8. \end{cases}$ **16.2.** $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 = 8, \\ 6x_1 + 5x_2 = -8. \end{cases}$ **16.3.** $\begin{cases} 9x_1 + 2x_2 = 3, \\ 7x_1 - 2x_2 = 13. \end{cases}$

16.4. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 7, \\ 4x_1 + 3x_2 = 8. \end{cases}$ **16.5.** $\begin{cases} 5x_1 + 9x_2 = 2, \\ 6x_1 + 7x_2 = 10. \end{cases}$ **16.6.** $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 = 1, \\ 8x_1 + 9x_2 = 1. \end{cases}$

В задачах 16.7—16.9 определить, при каких значениях параметра λ система имеет решения.

16.7. $\begin{cases} 6\lambda x_1 + 2x_2 = 5, \\ 9x_1 + 3x_2 = 7. \end{cases}$ **16.8.** $\begin{cases} \lambda x_1 + 2x_2 = 3, \\ 8x_1 + 4\lambda x_2 = 9. \end{cases}$ **16.9.** $\begin{cases} \lambda^2 x_1 + 3\lambda x_2 = 4, \\ 3x_1 + \lambda x_2 = 6. \end{cases}$

В задачах 16.10—16.25 с помощью определителей решить систему уравнений.

16.10. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$ **16.11.** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$

16.12. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$ **16.13.** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 5, \\ 6x_1 - x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$

16.14. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 7, \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 13. \end{cases}$ **16.15.** $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3, \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 2. \end{cases}$

16.16. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 8 = 0, \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 3 = 0. \end{cases}$ **16.17.** $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 4 = 0, \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 - 2 = 0, \\ 4x_1 + 8x_2 - x_3 - 2 = 0. \end{cases}$

16.18. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -4, \\ 5x_1 - 7x_2 + 8x_3 = -7. \end{cases}$ **16.19.** $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 5, \\ 4x_1 - 11x_2 + 10x_3 = 11. \end{cases}$

16.20. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 6x_1 + 3x_2 + x_3 = -9, \\ 8x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 5. \end{cases}$ **16.21.** $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_3 = 2. \end{cases}$

16.22. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 2, \\ 4x_1 - 9x_2 + x_3 - 8x_4 = -3, \\ x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 8x_4 = 4. \end{cases}$ **16.23.** $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 5, \\ 9x_1 + 9x_2 + x_3 + x_4 = 13, \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$

16.24. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0, \\ 2x_1-2x_2+3x_3-3x_4=15, \\ 9x_1+9x_2+4x_3+4x_4=5, \\ 3x_1-3x_2+2x_3-2x_4=15. \end{cases}$

16.25. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1, \\ x_1-x_2+4x_3-4x_4=-4, \\ 16x_1+16x_2+x_3+x_4=-6, \\ 16x_1-16x_2+4x_3-4x_4=7. \end{cases}$

16.2. Метод Гаусса. Простейшая схема

Пусть дана система m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n&=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n&=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+\ldots+a_{3n}x_n&=b_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n&=b_m. \end{aligned}\right\} \qquad (16.4)$$

Метод последовательного исключения неизвестных, или **метод Гаусса**, применяемый для решения системы (16.4), состоит в следующем. Предполагая, что $a_{11} \neq 0$ (это всегда можно сделать за счет нумерации уравнений), умножая первое уравнение системы (16.4) на $-a_{21}/a_{11}$ и прибавляя его ко второму, получаем уравнение, в котором коэффициент при x_1 обращается в нуль. Умножая первое уравнение на $-a_{31}/a_{11}$ и прибавляя результат к третьему, получаем уравнение, также не содержащее члена с x_1. Аналогичным путем преобразуем все остальные уравнения, в результате чего приходим к системе, эквивалентной исходной системе уравнений:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n&=b_1, \\ a'_{22}x_2+\ldots+a'_{2n}x_n&=b'_2, \\ a'_{32}x_2+\ldots+a'_{3n}x_n&=b'_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a'_{m2}x_2+\ldots+a'_{mn}x_n&=b'_m, \end{aligned}\right\} \qquad (16.5)$$

где a'_{ik} $(i=2, 3, \ldots, m;\ k=2, 3, \ldots, n)$ — некоторые новые коэффициенты.

Предполагая, что $a'_{22} \neq 0$, и оставляя неизменными первые два уравнения системы (16.5), преобразуем ее так, чтобы в каждом из остальных уравнений коэффициент при x_2 обратился в нуль. Продолжая этот процесс, систему (16.5) можно привести к одной из следующих систем:

$$\left.\begin{aligned} c_{11}x_1+c_{12}x_2+c_{13}x_3+\ldots+c_{1n}x_n&=d_1, \\ c_{22}x_2+c_{23}x_3+\ldots+c_{2n}x_n&=d_2, \\ c_{33}x_3+\ldots+c_{3n}x_n&=d_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{nn}x_n&=d_n, \end{aligned}\right\} \qquad (16.6)$$

где c_{ii} $(i=1, 2, \ldots, n)$ — некоторые коэффициенты, $c_{ii} \neq 0$; d_i — свободные члены;

$$\left.\begin{aligned} c_{11}x_1+c_{12}x_2+\ldots+c_{1k}x_k+\ldots+c_{1n}x_n&=d_1, \\ c_{22}x_2+\ldots+c_{2k}x_k+\ldots+c_{2n}x_n&=d_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{kk}x_k+\ldots+c_{kn}x_n&=d_k, \end{aligned}\right\} \qquad (16.7)$$

где $k<n$;

$$\left.\begin{aligned} c_{11}x_1+c_{12}x_2+\ldots+c_{1n}x_n&=d_1, \\ c_{22}x_2+\ldots+c_{2n}x_n&=d_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0\cdot x_n&=d_k, \end{aligned}\right\} \qquad (16.8)$$

где $k \leqslant n$.

Система (16.6) имеет единственное решение; значение x_n находится из последнего уравнения, значение x_{n-1} — из предпоследнего, значение x_1 — из первого.

Система (16.7) имеет бесконечное множество решений. Из последнего уравнения этой системы можно выразить одно из неизвестных (например, x_k) через остальные $n-k$ неизвестных $(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n)$, входящих в это уравнение; из предпоследнего уравнения можно выразить x_{k-1} через эти неизвестные и т. д. В полученных формулах, выражающих $x_1, x_2, \ldots, x_k$ через $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$, неизвестные $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ могут принимать любые значения.

Система (16.8) несовместна, так как никакие значения неизвестных не могут удовлетворять ее последнему уравнению.

Итак, метод последовательного исключения неизвестных применим к любой системе линейных уравнений. Решая систему этим методом, преобразования совершают не над уравнениями, а над матрицами, составленными из коэффициентов при неизвестных и свободных членов.

Примеры. 1. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x_1+2x_2+2x_3&=3, \\ 4x_1-2x_2-5x_3&=5, \\ 6x_1-x_2+3x_3&=1. \end{aligned}\right\}$$

Составим матрицу из коэффициентов при неизвестных и свободных членов:

$$A=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & -5 & 5 \\ 6 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

(вертикальной чертой отделен столбец, составленный из свободных членов). Умножая первую строку матрицы A поочередно на -4, -6 и прибавляя соответственно ко второй и третьей, получаем матрицу

$$A_1=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -10 & -13 & -7 \\ 0 & -13 & -9 & -17 \end{array}\right].$$

Умножив вторую строку матрицы A_1 на $-13/10$ и прибавив к третьей строке, получим новую матрицу

$$A_2=\left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -10 & -13 & -7 \\ 0 & 0 & 7{,}9 & -7{,}9 \end{array}\right].$$

Матрице A_2 соответствует система уравнений

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 3,\\ -10x_2 - 13x_3 &= -7,\\ 7{,}9x_3 &= -7{,}9. \end{aligned}\right\}$$

Из третьего уравнения находим $x_3 = -1$, второе уравнение дает $x_2 = 2$, а первое — $x_1 = 1$. Следовательно, исходная система также имеет решение: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$.

2. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 &= 1,\\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 2,\\ 4x_1 - 9x_2 + x_3 - 8x_4 &= -3,\\ x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 8x_4 &= 4. \end{aligned}\right\}$$

Составив матрицу и совершив соответствующие преобразования, получим:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 4 & -3 & 1\\ 2 & -3 & 3 & -2 & 2\\ 4 & -9 & 1 & -8 & -3\\ 1 & 6 & -4 & 8 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{l} (-2)\ (-4)\ (-1)\\ +\\ +\\ + \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 4 & -3 & 1\\ 0 & 1 & -5 & 4 & 0\\ 0 & -1 & -15 & 4 & -7\\ 0 & 8 & -8 & 11 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ 1\ (-8)\\ +\\ + \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 4 & -3 & 1\\ 0 & 1 & -5 & 4 & 0\\ 0 & 0 & -20 & 8 & -7\\ 0 & 0 & 32 & -21 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ 32/20\\ + \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 4 & -3 & 1\\ 0 & 1 & -5 & 4 & 0\\ 0 & 0 & -20 & 8 & -7\\ 0 & 0 & 0 & -41/5 & -41/5 \end{array}\right].$$

Из системы уравнений, соответствующей последней матрице, находим: $x_1 = 1/2$, $x_2 = -1/4$, $x_3 = 3/4$, $x_4 = 1$.

В задачах 16.26—16.45 решить систему уравнений методом Гаусса.

16.26. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3,\\ 4x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 5,\\ 6x_1 - x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$ **16.27.** $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3,\\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 = 2,\\ 3x_1 - 6x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$

16.28. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1,\\ x_1 - 6x_2 - 2x_3 = -1,\\ 4x_1 - 3x_2 + 8x_3 = -1. \end{cases}$ **16.29.** $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 8,\\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 8,\\ 4x_1 + x_2 - 6x_3 = 21. \end{cases}$

16.30. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1,\\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 5,\\ 5x_1 - 8x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$ **16.31.** $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 2,\\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1,\\ 6x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 5. \end{cases}$

16.32. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 2,\\ 2x_1 - 3x_2 + 8x_3 - 4x_4 = 1,\\ 4x_1 + 2x_2 + 19x_3 + x_4 = 8,\\ 6x_1 - 5x_2 + 11x_3 - 3x_4 = -3. \end{cases}$ **16.33.** $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 7,\\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1,\\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = -1,\\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5. \end{cases}$

16.34. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4,\\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = -1,\\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 11,\\ 5x_1 + 4x_3 + 2x_4 = 11. \end{cases}$ **16.35.** $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 2,\\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 8x_4 = 1,\\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 0,\\ x_1 + 6x_2 - x_3 + 12x_4 = 6. \end{cases}$

16.36. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1,\\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 2,\\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 7,\\ 7x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 6x_4 = 6. \end{cases}$ **16.37.** $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2,\\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0,\\ 4x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 4,\\ 5x_1 + 2x_2 - x_4 = 6. \end{cases}$

16.38. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0,\\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0,\\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0,\\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$ **16.39.** $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0,\\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0,\\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 5x_4 = 0,\\ x_1 - 5x_2 - x_3 - 8x_4 = 0. \end{cases}$

16.40. $\begin{cases} 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 - 6 = 0,\\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0,\\ 6x_1 + 5x_2 + 13x_3 - 8 = 0,\\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 - 2x_4 + 5 = 0. \end{cases}$ **16.41.** $\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 3\\ x_1 + x_2 + 6x_3 + 3x_4 = -3,\\ 5x_2 + 7x_3 + 4x_4 = 5,\\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1. \end{cases}$

16.42. $\begin{cases} x_1 + x_3 = 1,\\ 2x_1 + 8x_2 + 2x_3 = 1,\\ 16x_2 - 10x_4 = 21,\\ x_1 + 10x_2 + x_3 + 10x_5 = 2,\\ x_1 - 4x_2 + 6x_3 + x_4 - 2x_5 = -1. \end{cases}$ **16.43.** $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1,\\ 2x_2 - x_3 = -1,\\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -5,\\ -2x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 6,\\ x_1 + x_2 - 4x_4 + 2x_5 = 11. \end{cases}$

16.44. $\begin{cases} x_1 + x_3 = 0,\\ x_1 + x_4 = 3,\\ 2x_1 + 3x_3 + x_5 = 0,\\ 2x_3 + 3x_4 + x_6 = 7,\\ x_1 + 2x_3 + 2x_5 = 0,\\ x_2 + 2x_3 + 2x_6 = -7. \end{cases}$ **16.45.** $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0,\\ x_1 - x_2 + x_4 = 0,\\ 2x_1 + 2x_2 + x_5 = 0,\\ 2x_1 - 2x_2 + x_6 = 1,\\ x_1 + x_2 - x_3 - x_5 = 1,\\ x_1 - x_2 - x_4 - x_6 = 1. \end{cases}$

В задачах 16.46—16.59 исследовать систему уравнений и найти ее решение в зависимости от значения параметра α.

16.46. $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=3, \\ x_1+2x_2-3x_3=6, \\ x_1+x_2-5x_3=\alpha. \end{cases}$ **16.47.** $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=2, \\ 2x_1+3x_2+4x_3=3, \\ 3x_1+2x_2+\alpha x_3=6. \end{cases}$

16.48. $\begin{cases} x_1+2x_2-4x_3=3, \\ 2x_1+5x_2-x_3=15, \\ 3x_1+7x_2-5x_3=\alpha. \end{cases}$ **16.49.** $\begin{cases} \alpha x_1+x_2+x_3=6, \\ x_1+\alpha x_2+x_3=6, \\ x_1+x_2+\alpha x_3=6. \end{cases}$

16.50. $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=2, \\ 2x_1+\alpha x_2+x_3=1, \\ 3x_1+x_2+5x_3=3. \end{cases}$ **16.51.** $\begin{cases} \alpha x_1+x_2-x_3=1, \\ 2x_1+\alpha x_2-x_3=2, \\ 3x_1+2x_2+\alpha x_3=6. \end{cases}$

16.52. $\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+3x_4=5, \\ x_1+2x_2+x_3+2x_4=1, \\ x_1+2x_2+\alpha x_3+5x_4=13, \\ x_1+2x_2+3x_3+\alpha x_4=9. \end{cases}$ **16.53.** $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3+4x_4=5, \\ 4x_1-2x_2+5x_3+6x_4=7, \\ 6x_1-3x_2+7x_3+8x_4=9, \\ \alpha x_1-4x_2+9x_3+10x_4=11. \end{cases}$

16.54. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3+2x_4=3, \\ 4x_1+6x_2+3x_3+4x_4=5, \\ 6x_1+9x_2+5x_3+6x_4=7, \\ 8x_1+12x_2+7x_3+\alpha x_4=9. \end{cases}$ **16.55.** $\begin{cases} 5x_1-3x_2+2x_3+4x_4=3, \\ 4x_1-2x_2+3x_3+7x_4=1, \\ 8x_1-6x_2-x_3-5x_4=9, \\ 7x_1-3x_2+7x_3+17x_4=\alpha. \end{cases}$

16.56. $\begin{cases} \alpha x_1+x_2+2x_3+3x_4=1, \\ x_1+\alpha x_2+3x_3+2x_4=1, \\ x_1+x_2+x_3+4x_4=1, \\ x_1+x_2+4x_3+x_4=\alpha. \end{cases}$ **16.57.** $\begin{cases} \alpha x_1+2x_2+x_3+x_4=1, \\ 3x_1+\alpha x_2+x_3+x_4=2, \\ x_1+4x_2+x_3+x_4=3, \\ 5x_1+x_2+x_3+x_4=4. \end{cases}$

16.58. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1, \\ x_1+2x_2+x_3+x_4+x_5=2, \\ x_1+x_2+3x_3+x_4+x_5=3, \\ x_1+x_2+x_3-2x_4+x_5=4, \\ x_1+x_2+x_3+x_4-3x_5=\alpha. \end{cases}$ **16.59.** $\begin{cases} x_1+x_2-x_3-x_4+x_5=1, \\ x_1+x_2-x_3-x_4+5x_5=\alpha, \\ 2x_1+x_2-x_3-x_4+x_5=2, \\ 3x_1+x_2-x_3-x_4+\alpha x_5=7, \\ 4x_1+x_2-x_3-x_4+x_5=4. \end{cases}$

16.3. Метод Гаусса. Схема с выбором главного элемента

Если коэффициентами линейных уравнений системы являются дроби или числа, достаточно большие по модулю, процесс ее решения усложняется. Применяя в подобных случаях метод Гаусса, получают приближенное решение системы уравнений, так как при преобразованиях системы пользуются приближенными результатами арифметических действий над коэффициентами. Неизбежное округление результатов промежуточных действий приводит к возникновению и накоплению погрешности. Чтобы уменьшить вычислительную погрешность и иметь возможность контролировать проводимые вычисления, применяют несколько видоизмененный метод Гаусса.

Пусть дана система линейных алгебраических уравнений (16.1), которую в матричном виде можно записать так:

$$AX = B, \tag{16.9}$$

где

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix};\ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}. \tag{16.10}$$

Метод Гаусса с выбором главного элемента состоит в следующем. В системе (16.1) выбирают сначала уравнение, содержащее наибольший по модулю коэффициент системы (*главный, или ведущий, элемент*), и делят это уравнение на указанный коэффициент. Из остальных уравнений исключают то неизвестное, при котором был наибольший по модулю коэффициент в выбранном уравнении. (Для удобства главный элемент можно поместить в первую строку и первый столбец матрицы, над которой производятся соответствующие преобразования.) Далее в этих уравнениях ищут наибольший по модулю коэффициент (новый главный элемент), делят на него уравнение, в котором он находится, исключают из остальных уравнений соответствующее неизвестное и так до тех пор, пока не останется одно уравнение с одним неизвестным, т. е. пока система (16.1) не будет приведена к диагональному виду. Из последней системы легко определяются значения неизвестных.

Чтобы избежать ошибок, применяют контрольные вычисления. Для этого поступают следующим образом. Вводят новые неизвестные y_i по формулам:

$$y_i = x_i + 1 \quad (i = 1,\ 2,\ \dots,\ n) \tag{16.11}$$

или $Y = X + E$, где

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix};\ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix};\ E = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

В результате приходят к новой системе уравнений

$$AY = A(X+E) = AX + AE = B + AE = H,\ \ AY = H, \tag{16.12}$$

где

$$H = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix},\ \ h_i = b_i + \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \quad (i = 1,\ 2,\ \dots,\ n). \tag{16.13}$$

Одновременно решают обе системы (16.1) и (16.12); приводят их к диагональному виду. Все вычисления записывают в таблицу, контролируют их с помощью чисел контрольного столбца.

Пример. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} 0{,}10x_1 - 0{,}20x_2 + 0{,}30x_3 &= 0{,}22, \\ 0{,}20x_1 - 0{,}30x_2 + 0{,}50x_3 &= 0{,}45, \\ 0{,}30x_1 - 0{,}40x_2 + 0{,}20x_3 &= 0{,}13. \end{aligned}\right\}$$

Применяем метод Гаусса с выбором главного элемента. В данном случае главным элементом является коэффициент 0,50 при неизвестном x_3 во втором уравнении (наибольший по модулю из всех коэффициентов при неизвестных).

Поменяем местами первое и второе уравнения, а также запишем в обратном порядке слагаемые в левой части каждого уравнения:

$$\left.\begin{aligned} 0{,}50x_3 - 0{,}30x_2 + 0{,}20x_1 &= 0{,}45, \\ 0{,}30x_3 - 0{,}20x_2 + 0{,}10x_1 &= 0{,}22, \\ 0{,}20x_3 - 0{,}40x_2 + 0{,}30x_1 &= 0{,}13. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

При такой записи матрица A системы будет содержать главный элемент в качестве элемента a_{11} (расположен в левом верхнем углу).

Составим таблицу (табл. 16.1), в которой i означает номер строки (в первом вертикальном столбце), k — номер неизвестного (в последней строке), B — матрица-столбец, составленная из свободных членов данной системы (см. формулы (16.10)), H — матрица-столбец (см. формулу (16.13)), элементы которой равны суммам всех коэффициентов и свободных членов соответствующих уравнений.

Таблица 16.1

i	A			B	H
1	0,50	—0,30	0,20	0,45	0,85
2	0,30	—0,20	0,10	0,22	0,42
3	0,20	—0,40	0,30	0,13	0,23
k	3	2	1		

Первое уравнение системы (1) делим на 0,50 (главный элемент) и исключаем x_3 из двух остальных уравнений. Составляем таблицу для преобразованной системы (табл. 16.2).

Таблица 16.2

i	A_1			B_1	H_1	Σ_1
1	1	—0,60	0,40	0,90	1,70	1,70
2	0	—0,02	—0,02	—0,05	—0,09	—0,09
3	0	—0,28	0,22	—0,05	—0,11	—0,11
k	3	2	1			

Элементы предпоследнего столбца H_1 получены в результате соответствующих преобразований над элементами табл. 16.1: $1{,}70 = 0{,}85/0{,}5$; $-0{,}09 = (-0{,}3)\,1{,}70 + 0{,}42$; $-0{,}11 = (-0{,}2)\,1{,}70 + 0{,}23$.

Элементы последнего столбца Σ_1 равны суммам соответствующих элементов второго, третьего, четвертого и пятого столбцов: $1{,}70 = 1{,}00 + (-0{,}60) + 0{,}40 + 0{,}90$; $-0{,}09 = 0{,}00 + (-0{,}02) + (-0{,}02) + (-0{,}05)$; $-0{,}11 = 0{,}00 + (-0{,}28) + 0{,}22 + (-0{,}05)$. Последний столбец служит для контроля вычислений. Совпадение столбцов H_1 и Σ_1, элементы которых получаются в результате различных действий, означает, что вычисления произведены верно.

Рассматриваем второе и третье уравнения преобразованной системы, не содержащие x_3. В матрице из коэффициентов этих уравнений выбираем новый главный элемент; он равен $-0{,}28$. Меняем местами эти уравнения, делим уравнение, содержащее главный элемент, на $-0{,}28$, исключаем x_2 из оставшегося уравнения. Результаты вычислений записываем в табл. 16.3.

Как и в табл. 16.2, последний столбец Σ_2 служит для контроля вычислений. Элементы этого столбца равны суммам соответствующих элементов матриц A_2 и B_2: $1{,}700 = 1{,}0000 + (-0{,}6000) + 0{,}4000 + 0{,}9000$; $0{,}3929 = 0{,}0000 + 1{,}0000 + (-0{,}7857) + 0{,}1788$; $0{,}0821 = 0{,}0357 + 0{,}0464$. Элементы столбца H_2 получены в результате преобразований над матрицей из элементов A_1, B_1, H_1 табл. 16.2 (вторую строку умножили на -1, затем поменяли ее местами с третьей строкой, новую вторую строку разделили на $-0{,}28$, полученную строку умножили на $-0{,}02$ и прибавили к третьей: $0{,}3929 \approx (-0{,}11)/(-0{,}28)$, $0{,}0821 \approx (-0{,}02;\ 0{,}3929 + 0{,}09)$.

Таблица 16.3

i	A_2			B_2	H_2	Σ_2
1	1	—0,6000	0,4000	0,9000	1,7000	1,7000
2	0	1	—0,7857	0,1786	0,3929	0,3929
3	0	0	0,0357	0,0464	0,0821	0,0821
k	3	2	1			

Из табл. 16.3 следует, что системы (16.9) и (16.12) в данном случае принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} x_3 - 0{,}6000x_2 + 0{,}4000x_1 &= 0{,}9000,\\ x_2 - 0{,}7857x_1 &= 0{,}1786,\\ 0{,}0357x_1 &= 0{,}0464; \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} y_3 - 0{,}6000y_2 + 0{,}4000y_1 &= 1{,}7000,\\ y_2 - 0{,}7857y_1 &= 0{,}3929,\\ 0{,}0357y_1 &= 0{,}0821. \end{aligned}\right\}$$

Решая эти системы, находим: $x_1 = 1{,}3$, $x_2 = 1{,}2$, $x_3 = -1{,}1$; $y_1 = 2{,}3$, $y_2 = 2{,}2$, $y_3 = 2{,}1$.

Поскольку все значения y на единицу больше соответствующих значений x: $y_i = x_i + 1$ ($i = 1, 2, 3$), т. е. выполняются равенства (16.11), вычисления проведены верно. Следовательно, исходная система имеет решение: $x_1 = 1{,}3$, $x_2 = 1{,}2$, $x_3 = 1{,}1$.

З а м е ч а н и е. Все три таблицы можно объединить в одну.

В задачах 16.60—16.68 методом Гаусса с помощью схемы выбора главного элемента решить систему уравнений.

16.60. $\begin{cases} 0{,}5x_1 + 0{,}4x_2 - 0{,}3x_3 = 0{,}8,\\ 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 - 0{,}2x_3 = 0{,}9,\\ 0{,}3x_1 + 0{,}2x_2 - 0{,}3x_3 = 0{,}3. \end{cases}$

16.61. $\begin{cases} 0{,}4x_1 - 0{,}5x_2 + \phantom{0{,}1}x_3 = 0,\\ 0{,}5x_1 - 0{,}2x_2 + 0{,}1x_3 = 0{,}9,\\ 0{,}3x_1 - 0{,}2x_2 + 0{,}2x_3 = 1. \end{cases}$

16.62. $\begin{cases} 0{,}30x_1 + 0{,}40x_2 + 0{,}50x_3 = 2{,}66,\\ 0{,}50x_1 + 0{,}30x_2 + 0{,}20x_3 = 2{,}17,\\ 0{,}20x_1 + 0{,}10x_2 + 0{,}50x_3 = 1{,}89. \end{cases}$

16.63. $\begin{cases} 0{,}20x_1 + 0{,}30x_2 + 0{,}40x_3 = 0{,}56, \\ 0{,}30x_1 + 0{,}40x_2 + 0{,}50x_3 = 0{,}70, \\ 0{,}10x_1 + 0{,}20x_2 + 0{,}30x_3 = 0{,}52. \end{cases}$

16.64. $\begin{cases} 0{,}40x_1 + 0{,}21x_2 + 1{,}28x_3 = 0, \\ x_1 + 0{,}40x_2 + 0{,}35x_3 = 1, \\ 0{,}52x_1 + 0{,}75x_2 + 0{,}40x_3 = 0. \end{cases}$

16.65. $\begin{cases} 0{,}50x_1 + 0{,}21x_2 + 1{,}28x_3 = 0, \\ x_1 + 0{,}50x_2 + 0{,}35x_3 = 1, \\ 0{,}52x_1 + 0{,}75x_2 + 0{,}50x_3 = 0. \end{cases}$

16.66. $\begin{cases} 0{,}5x_1 + 0{,}4x_2 + 0{,}3x_3 + 0{,}2x_4 = 1{,}7, \\ 0{,}4x_1 + 0{,}3x_2 + 0{,}2x_3 + 0{,}1x_4 = 1{,}1, \\ 0{,}3x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}1x_3 + 0{,}5x_4 = 1{,}4, \\ 0{,}2x_1 + 0{,}3x_2 + 0{,}4x_3 + 0{,}5x_4 = 1{,}8. \end{cases}$

16.67. $\begin{cases} 0{,}10x_1 + 0{,}20x_2 + 0{,}30x_3 + 0{,}40x_4 = 0{,}92, \\ 0{,}20x_1 + 0{,}30x_2 + 0{,}40x_3 + 0{,}50x_4 = 0{,}80, \\ 0{,}30x_1 + 0{,}40x_2 + 0{,}50x_3 + 0{,}10x_4 = 0{,}48, \\ 0{,}40x_1 + 0{,}50x_2 + 0{,}10x_3 + 0{,}20x_4 = 1{,}41. \end{cases}$

16.68. $\begin{cases} 0{,}70x_1 + 0{,}21x_2 + 1{,}28x_3 + 2{,}00x_4 = 1, \\ x_1 + 0{,}70x_2 + 0{,}35x_3 + 1{,}20x_4 = 0, \\ 0{,}52x_1 + 0{,}75x_2 + 0{,}70x_3 + 1{,}39x_4 = 1, \\ 0{,}87x_1 + 0{,}92x_2 + 0{,}64x_3 + 0{,}70x_4 = 0. \end{cases}$

17. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

Уравнения линейные ($ax+b=0$) и квадратные ($ax^2+bx+c=0$) можно решить с помощью известных формул. Существуют формулы, выражающие корни уравнений третьей и четвертой степени через их коэффициенты. Однако для алгебраического уравнения n-й степени, т. е. уравнения $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$, в случае $n \geqslant 5$ таких формул не существует. Нет точных методов решения многих трансцендентных уравнений, т. е. уравнений, не являющихся алгебраическими (например, $\operatorname{tg} x - x = 0$). По этой причине для решения алгебраических и трансцендентных уравнений применяют приближенные методы.

17.1. Отделение корней уравнения

Корнем уравнения

$$f(x) = 0 \tag{17.1}$$

называется такое значение $x = \xi$ аргумента функции $f(x)$, при котором это уравнение обращается в тождество, т. е. $f(\xi) \equiv 0$. Корень уравнения (17.1) геометрически представляет абсциссу точки пересечения, точки касания или другой общей точки графика функции $y = f(x)$ и оси Ox (рис. 17.1, *а — в*).

Отделить корень уравнения — значит найти такой конечный промежуток, внутри которого имеется единственный корень данного уравнения.

Отделение корней уравнения (17.1) можно выполнить графически, если удается построить график функции $y = f(x)$, с помощью которого выясняют, в каких промежутках находятся точки пересечения его с осью Ox. В случаях,

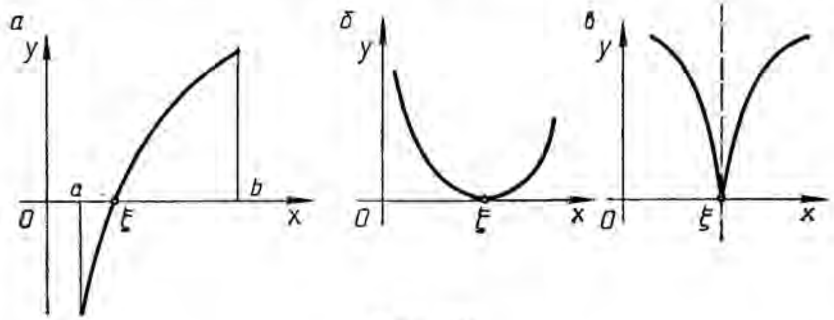


Рис. 17.1

когда построение графика функции затруднительно, следует представить уравнение (17.1) в эквивалентном виде

$$f_1(x) = f_2(x) \tag{17.2}$$

с таким расчетом, чтобы графики функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ можно было построить по возможности проще. Корень уравнения (17.2) геометрически представляет абсциссу точки пересечения графиков функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$. Таким способом легко, например, найти корни уравнения $x^3 + px + q = 0$; это будут абсциссы точек пересечения прямой $y = -px - q$ и линии $y = x^3$.

Для отделения корней уравнения (17.1) применяют следующий критерий: *если на отрезке* $[a, b]$ *функция* $f(x)$ *непрерывна и монотонна, а ее значения на концах этого отрезка имеют разные знаки, то на рассматриваемом отрезке имеется один и только один корень уравнения.* Достаточным признаком монотонности функции $f(x)$ на данном отрезке является сохранение на нем знака первой ее производной (если $f'(x) > 0$, функция возрастает на данном отрезке; если $f'(x) < 0$, функция убывает на нем).

Примеры. 1. Отделить корни уравнения $x^3 + 3x - 2 = 0$.

Функция $f(x) = x^3 + 3x - 2$ определена на всей действительной оси. Производная $f'(x) = 3x^2 + 3$ принимает положительные значения при всех x, функция возрастает в промежутке $(-\infty, +\infty)$. При отрицательных x, достаточно больших по абсолютной величине, функция принимает отрицательные значения, при достаточно больших положительных x функция положительна (символически это записывается так: $f(-\infty) < 0$, $f(+\infty) > 0$). Так как функция монотонна и принимает значения разных знаков, то данное уравнение имеет единственный действительный корень в промежутке $(-\infty, +\infty)$.

Корень считается отделенным, если указан конечный промежуток, в котором он находится. Чтобы найти этот промежуток, можно применить метод проб, т. е. рассмотреть значения функции при некоторых произвольно фиксированных значениях аргумента. Если при двух значениях аргумента a и b функция принимает значения разных знаков, то (a, b) — интервал, в котором находится корень. Фиксируем значения $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, при которых проще вычисляются значения функции. Поскольку $f(-1) = -1 - 3 - 2 < 0$, $f(0) = -2 < 0$, то в интервале $(-1, 0)$ корня нет. Так как $f(0) < 0$, а $f(1) = 1 + 3 - 2 > 0$, то корень содержится в интервале $(0, 1)$.

Замечание. Корень данного уравнения можно отделить и графически. Перепишем это уравнение в виде $x^3 = -3x + 2$ и рассмотрим графики двух функций: $y = x^3$, $y = -3x + 2$ (рис. 17.2). Из рисунка видно, что указанные графики пересекаются в точке M, абсцисса которой находится на отрезке $[0, 1]$.

2. Графически отделить корни уравнения $x \ln x - 1 = 0$.

Данное уравнение представим в виде $\ln x = 1/x$ $(x \neq 0)$ и рассмотрим графики двух функций: $y = \ln x$, $y = 1/x$ (рис. 17.3). Из рисунка видно, что графики этих функций пересекаются в единственной точке M, абсцисса которой принадлежит интервалу $(1, 2)$. Следовательно, единственный корень уравнения находится в интервале $(1, 2)$.

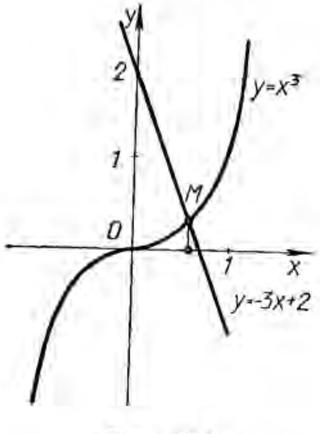


Рис. 17.2

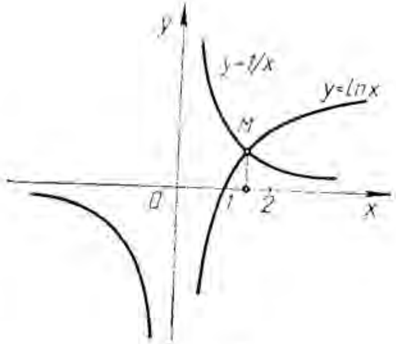


Рис. 17.3

В задачах 17.1—17.12 определить, сколько действительных корней имеет уравнение.

17.1. $x^3 + 6x - 5 = 0$.
17.2. $x^3 + 4x - 3 = 0$.
17.3. $x^3 + 4x^2 - 6 = 0$.
17.4. $x^3 - 6x^2 + 9x - 2 = 0$.
17.5. $\operatorname{th} x + x^2 - 3{,}487 = 0$.
17.6. $2 \ln x - (x-2)^2 = 0$.
17.7. $x \sin x - 1 = 0$.
17.8. $\sin x - x \cos x = 0$.
17.9. $e^x + e^{-x} = 0$.
17.10. $x^4 - x + 1 = 0$.
17.11. $x^6 - 0{,}52x + 0{,}73 = 0$.
17.12. $x^3 - 2x^2 + x - 4 = 0$.

В задачах 17.13—17.18 найти границы отрицательных и положительных корней уравнения.

17.13. $2x^3 - 5x^2 + 7x - 1 = 0$.
17.14. $3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 6x - 4 = 0$.
17.15. $2x^5 - 10x^4 + 15x^3 - 10x^2 + 5x - 3 = 0$.
17.16. $x^6 - 6x^4 + 12x^2 - 6 = 0$.
17.17. $x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 6x - 7 = 0$.
17.18. $x^7 - 4x^6 + 2x^5 - 3x^4 + x^3 - 2x^2 + 5x - 6 = 0$.

В задачах 17.19—17.44 отделить корни уравнения.

17.19. $x^3 + 3x - 1 = 0$.
17.20. $x^3 - 5x + 1 = 0$.
17.21. $x^3 - 6x^2 + 9x - 3 = 0$.
17.22. $x^3 + 6x^2 + 9x + 2 = 0$.
17.23. $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$.
17.24. $9x^3 + 6x^2 - 1 = 0$.
17.25. $x^3 + 4x - 6 = 0$.
17.26. $x^3 + 4x^2 - 6 = 0$.
17.27. $x^3 - 0{,}9x + 0{,}6 = 0$.
17.28. $x^3 - 1{,}96x - 0{,}89 = 0$.
17.29. $x^3 - 1{,}95x - 1{,}35 = 0$.
17.30. $4x^3 - 25{,}4x^2 + 40x - 9 = 0$.
17.31. $x^4 - 2{,}15x + 0{,}95 = 0$.
17.32. $x^4 - 6{,}8x^3 + 21x^2 - 68x + 108 = 0$.
17.33. $x^4 - 8{,}8x^3 + 20x^2 - 9x + 19 = 0$.
17.34. $x^4 + 1{,}025x - 0{,}975 = 0$.
17.35. $x^5 + 1{,}035x - 2{,}045 = 0$.
17.36. $x^5 - 0{,}55x + 3{,}95 = 0$.
17.37. $x^6 - 0{,}251x - 0{,}247 = 0$.
17.38. $x^6 + 0{,}495x + 0{,}482 = 0$.
17.39. $x^7 + 0{,}512x + 0{,}935 = 0$.
17.40. $x^8 + 0{,}9x - 1{,}1 = 0$.
17.41. $e^x + x^2 - 2 = 0$.
17.42. $2 \lg x - x/2 + 1 = 0$.
17.43. $(x-1)^2 - \sin 2x = 0$.
17.44. $2 \lg x - (x-2)^2 = 0$.

17.2. Метод хорд

Пусть на отрезке $[a, b]$ находится единственный корень ξ уравнения (17.1), левая часть которого $f(x)$ — непрерывная функция. Через точки $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$ проведем прямую, уравнение которой

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a} \quad \text{или} \quad x - a = \frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a).$$

Найдем абсциссу точки пересечения этой прямой с осью Ox, для чего в последнем уравнении положим $y = 0$:

$$x_1 = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)} \quad \text{или} \quad x_1 = \frac{bf(a) - af(b)}{f(a) - f(b)}. \tag{17.3}$$

Формула (17.3) определяет приближенное значение корня уравнения (17.2); его называют *первым приближением*. Чтобы получить *второе приближение* x_2, формулу (17.3) необходимо применить к тому из отрезков $[a, x_1]$, $[x_1, b]$, на концах которого функция принимает значения противоположных знаков.

Аналогично вычисляются и следующие приближения. Если известно $(n-1)$-е приближение, то n-е приближение вычисляется по формуле

$$x_n = \frac{bf(x_{n-1}) - x_{n-1}f(b)}{f(x_{n-1}) - f(b)} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{17.4}$$

в случае (рис. 17.4, *а*), когда

$$f(b)f''(x) > 0, \tag{17.5}$$

или по формуле

$$x_n = \frac{af(x_{n-1}) - x_{n-1}f(a)}{f(x_{n-1}) - f(a)} \tag{17.6}$$

в случае (рис. 17.4, *б*), когда

$$f(a)f''(x) > 0. \tag{17.7}$$

В первом случае за начальное приближение принимается a, т. е. $x_0 = a$, во втором — b, т. е. $x_0 = b$.

Последовательность чисел x_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) сходится к корню ξ, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$.

Вычисления приближений $x_1, x_2, x_3, \ldots$ следует производить до тех пор, пока два последовательных приближения x_n, x_{n+1} не совпадут на заданное число знаков.

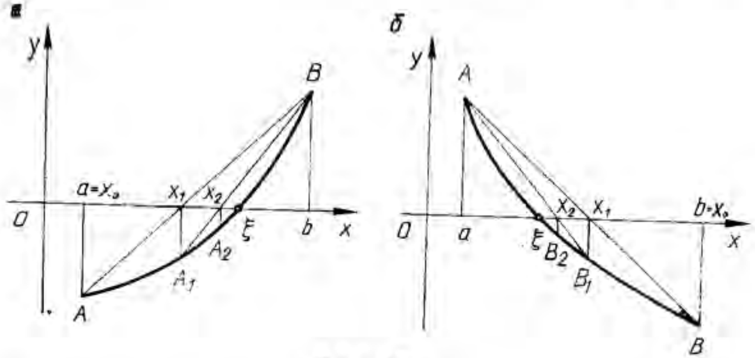


Рис. 17.4

Для промежуточных выкладок надо брать один-два запасных знака.

Если функция $f(x)$ имеет отличную от нуля производную $f'(x)$ на отрезке $[a, b]$, то оценка абсолютной погрешности вычислений определяется формулой

$$|\xi - x_n| \leqslant \frac{f(x_n)}{\mu}, \tag{17.8}$$

где $\mu = \min\limits_{a<x<b} |f'(x)|$.

Примеры. 1. Методом хорд найти действительный корень уравнения $x^3 + x - 1 = 0$.

В данном случае $f(x) = x^3 + x - 1$, $f'(x) = 3x^2 + 1$. Поскольку $f(0,5) < 0$, $f(1) > 0$, $f'(x) > 0$ для всех x, то на отрезке $[0,5;\ 1]$ находится единственный действительный корень уравнения. Так как $f''(x) = 6x$ и $f(1)f''(x) > 0$, т. е. выполнено неравенство (17.5), воспользуемся формулой (17.4), положив в ней $b = 1$, $x_0 = 0{,}5$. Вычислим сначала $f(x_0)$, $f(b)$, входящие в эту формулу. При $n = 0$ получаем:

$$f(x_0) = f(0{,}5) = (0{,}5)^3 + 0{,}5 - 1 = -0{,}375; \quad f(b) = f(1) = 1^3 + 1 - 1 = 1.$$

По формуле (17.4), полагая $n = 1, 2, 3$, вычисляем:

$$x_1 = \frac{bf(x_0) - x_0 f(b)}{f(x_0) - f(b)} = \frac{1\cdot(-0{,}375) - 0{,}5\cdot 1}{-0{,}375 - 1} \approx 0{,}636364;$$

$$x_2 = \frac{bf(x_1) - x_1 f(b)}{f(x_1) - f(b)} = \frac{1\cdot(-0{,}105935) - 0{,}636364}{-0{,}105935 - 1} \approx 0{,}671196;$$

$$x_3 = \frac{bf(x_2) - x_2 f(b)}{f(x_2) - f(b)} = \frac{1\cdot(-0{,}026428) - 0{,}671196\cdot 1}{-0{,}026428 - 1} \approx 0{,}679662.$$

Аналогично находим последующие приближения: $x_4 = 0{,}681691$, $x_5 = 0{,}682176$, $x_6 = 0{,}682292$, $x_7 = 0{,}682319$, $x_8 = 0{,}682326$, $x_9 = 0{,}682327$. Следовательно, с точностью до 0,0001 получено значение корня $\xi = 0{,}6823$.

2. Методом хорд найти корень уравнения $x^3 - 2x + 7 = 0$.

Поскольку $f(x) = x^3 - 2x + 7$, $f(-3) = -27 + 6 + 7 < 0$, $f(-2) = -8 + 4 + 7 > 0$, то корень уравнения находится на отрезке $[-3, -2]$. Серединой этого отрезка является точка $x = -2{,}5$. Поскольку $f(-2{,}5) = (-2{,}5)^3 - 2(-2{,}5) + 7 = -3{,}625 < 0$, корень принадлежит отрезку $[-2{,}5;\ -2]$. Продолжая аналогичные рассуждения, находим отрезок $[-2{,}3;\ -2{,}2]$, на котором лежит корень уравнения. На этом отрезке производные $f'(x) = 3x^2 - 2$ и $f''(x) = 6x$ сохраняют знак.

Так как $f(-2{,}3)\, f''(x) > 0$, т. е. выполнено условие (17.7), воспользуемся формулой (17.6), положив $x_0 = -2{,}2$. Приняв во внимание, что $f(x_0) = f(-2{,}2) = 0{,}752$, по формуле (17.6) получаем результаты, приведенные в табл. 17.1. Из таблицы видно, что $\xi = -2{,}258$ — корень уравнения.

Таблица 17.1

n	x_{n-1}	$f(x_{n-1})$	$af(x_{n-1})$	$x_{n-1}f(a)$	$af(x_{n-1}) - x_{n-1}f(a)$	$f(x_{n-1}) - f(a)$	x_n
1	−2,2	0,752	−1,7296	1,2474	−2,9770	1,319	−2,25701
2	−2,25701	0,016558	−0,038083	1,279725	−1,317809	0,583558	−2,258231
3	−2,258231	0,000371	−0,000853	1,280417	−1,281270	0,567371	−2,258259

В задачах 17.45—17.62 найти действительные корни уравнения.

17.45. $x^3 - 2x + 7 = 0$. **17.46.** $x^3 - 2x^2 + x - 4 = 0$.

17.47. $x^3 - 1{,}96x - 0{,}89 = 0$. **17.48.** $x^3 - 1{,}95x - 1{,}35 = 0$.

17.49. $x^3 + 0{,}995x + 1{,}025 = 0$. **17.50.** $x^3 + 0{,}985x + 0{,}991 = 0$.

17.51. $x^4 + 1{,}025x - 0{,}975 = 0$. **17.52.** $x^4 - 4{,}1x^2 - 0{,}9x + 1{,}2 = 0$.

17.53. $x^5 - 0{,}55x + 3{,}95 = 0$. **17.54.** $x^5 + 1{,}035x - 2{,}045 = 0$.

17.55. $x^5 + 1{,}025x - 3{,}116 = 0$. **17.56.** $x^6 - 0{,}251x - 0{,}247 = 0$.

17.57. $x^7 - 0{,}512x + 0{,}908 = 0$. **17.58.** $x^8 + 0{,}9x - 1{,}1 = 0$.

17.59. $x^2 \lg x - 1 = 0$. **17.60.** $2x \ln x - 1 = 0$.

17.61. $2x^2 \ln x - 1 = 0$. **17.62.** $(x - 1)^2 - \sin 2x = 0$.

В задачах 17.63—17.66 найти положительные корни уравнения.

17.63. $x^5 - 3{,}15x + 0{,}43 = 0$. **17.64.** $x^7 - 2{,}05x - 0{,}15 = 0$.

17.65. $e^x + x^2 - 2 = 0$. **17.66.** $e^{-x} + x^2 - 2 = 0$.

В задачах 17.67—17.70 найти меньший положительный корень уравнения.

17.67. $x^3 - 5x + 1 = 0$.

17.68. $x^4 - 6{,}8x^3 + 21x^2 - 68x + 108 = 0$.

17.69. $2 \lg x - (x - 2)^2 = 0$. **17.70.** $e^x - 2(x - 1)^2 = 0$.

В задачах 17.71, 17.72 найти больший корень уравнения.

17.71. $x^4 - 8{,}8x^3 + 20x^2 - 9x + 19 = 0.$

17.72. $x^4 - 2{,}15x + 0{,}95 = 0.$

В задачах 17.73—17.76 найти наименьший положительный корень уравнения.

17.73. $\sqrt{x} - \cos 0{,}387x = 0.$ **17.74.** $1{,}8x^2 - \sin 10x = 0.$

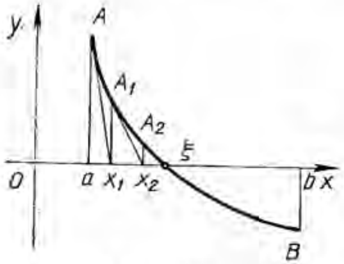
17.75. $x - 3\cos^2 1{,}4x = 0.$ **17.76.** $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} x - x - 3 = 0.$

17.3. Метод касательных

М е т о д к а с а т е л ь н ы х (или м е т о д Н ь ю т о н а) состоит в следующем. Пусть на отрезке $[a, b]$ находится единственный корень ξ уравнения (17.1). Проведем касательную к кривой $y = f(x)$ в точке $A(a, f(a))$ до пересечения с осью Ox (рис. 17.5): ее уравнение имеет вид $y - f(a) = f'(a)(x - a)$. Полагая в этом уравнении $y = 0$, находим абсциссу x_1 точки пересечения касательной с осью Ox:

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

в предположении, что $f'(a) \neq 0$.



Р и с. 17.5

Абсциссу x_1 точки пересечения касательной с осью Ox можно взять в качестве первого приближения корня. Проведя касательную через соответствующую точку $A_1(x_1, f(x_1))$ и найдя точку ее пересечения с осью Ox, получим x_2 — второе приближение корня. Аналогично определяются последующие приближения. В методе касательных n-е приближение вычисляется по формуле

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{17.9}$$

причем за начальное приближение принимается такое значение x_0 из отрезка $[a, b]$, для которого выполняется условие

$$f(x_0) f''(x) > 0, \tag{17.10}$$

называемое *условием Фурье*.

Оценка погрешности определяется формулой (17.8).

П р и м е р ы. 1. Методом касательных найти действительный корень уравнения $x^3 + x - 3 = 0$.

Записав данное уравнение в виде $x^3 = -x + 3$ и построив графики функций $f_1(x) = x^3$, $f_2(x) = -x + 3$, найдем, что единственный корень уравнения принадлежит отрезку [1, 2]. Укажем отрезок меньшей длины, на котором находится корень. Так как $f(x) = x^3 + x - 3$, $f(1{,}2) = (1{,}2)^3 + (1{,}2) - 3 = -0{,}072 < 0$, $f(1{,}3) = (1{,}3)^3 + 1{,}3 - 3 = 0{,}497 > 0$, то корень лежит на отрезке [1,2; 1,3]. Серединой этого отрезка является точка $x = 1{,}25$. Поскольку $f(1{,}25) = (1{,}25)^3 + (1{,}25) - 3 = 0{,}203125 > 0$ и $f(1{,}2) < 0$, то искомый корень принадлежит отрезку [1,20; 1,25].

Данная функция $f(x) = x^3 + x - 3$ имеет производные $f'(x) = 3x^2 + 1$, $f''(x) = 6x$, принимающие положительные значения на отрезке [1,20; 1,25].

В качестве начального приближения возьмем $x_0 = 1{,}25$, так как для этой точки выполнено условие (17.10).

Результаты вычислений, выполненных по формуле (17.9), записываем в табл. 17.2, из которой видно, что искомый корень — $x = 1{,}21341$.

Таблица 17.2

n	x_n	x_n^3	$f(x_n) = x_n^3 + x_n - 3$	$f'(x_n) = 3x_n^2 + 1$	$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	1,25	1,953125	0,203125	5,6875	0,035714	1,214286
1	1,214286	1,790452	0,004738	5,42347	0,000874	1,213412
2	1,213412	1,786590	0,000002	5,417107	0,0000004	1,213412

2. Вычислить приближенно по методу касательных с точностью до пяти десятичных знаков после запятой больший отрицательный корень уравнения $x^3 - 12x - 8 = 0$.

Графически отделяя корни данного уравнения, заключаем, что уравнение имеет три действительных корня, больший отрицательный корень принадлежит отрезку $[-1, 0]$. Можно указать отрезок меньшей длины, на котором находится корень, а именно отрезок $[-0{,}7; -0{,}65]$. Поскольку $f''(x) = 6x$, $f''(-0{,}65) < 0$, $f(-0{,}65) < 0$, $f(-0{,}65) f''(-0{,}65) > 0$, т. е. выполнено условие (17.10), то в качестве нулевого приближения берем $x_0 = -0{,}65$. По формуле (17.9) вычисляем последовательные приближения (табл. 17.3).

Таблица 17.3

n	x_n	$f(x_n)$	$\frac{1}{f'(x_n)}$	$\Delta = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	x_{n+1}
0	−0,65	−0,474625	−0,093175	0,044223	−0,694223
1	−0,694223	−0,003902	−0,094759	0,000370	−0,694593
2	−0,694593	−0,000003	−0,095711	0,0000003	−0,694593

Из таблицы видно, что искомый корень $\xi = -0{,}694593$.

З а м е ч а н и е. Два других корня данного уравнения можно найти аналогичным способом: сначала отделить каждый из них на отрезке достаточно малой длины, потом вычислить их с помощью метода касательных. Можно поступить и по-другому. Разделив многочлен $x^3 - 12x - 8$ на $x - \xi$, получим квадратное уравнение, корни которого можно принять за начальные приближения двух других корней исходного уравнения, а потом вычислить их методом касательных. Выполнив соответствующие вычисления, получим $\xi_1 = -3{,}064178$, $\xi_2 = 3{,}758771$.

В задачах 17.77—17.94 методом касательных найти действительные корни уравнения.

17.77. $x^3 + 4x + 3 = 0.$ **17.78.** $2x^3 - 4x^2 + 1 = 0.$

17.79. $x^3 + x - 1 = 0.$ **17.80.** $x^3 + x - 3 = 0.$

17.81. $x^3 - x + 3 = 0.$ **17.82.** $x^3 - x + 1 = 0.$

17.83. $x^5 - 0{,}5x + 2 = 0.$ **17.84.** $x^3 + 0{,}5x - 1 = 0.$

17.85. $x^3 + 0{,}25x - 1 = 0.$ **17.86.** $x^3 - 0{,}27x + 2 = 0.$

17.87. $x^3 + 0{,}75x - 3 = 0.$ **17.88.** $x^3 - 0{,}75x + 2 = 0.$

17.89. $e^{-x} + x - 3 = 0.$ **17.90.** $e^x - x - 2 = 0.$

17.91. $x^5 - 0{,}45x - 4{,}13 = 0.$ **17.92.** $x^5 + 0{,}875x - 3{,}125 = 0.$

17.93. $x^7 + 0{,}9x + 2{,}1 = 0.$ **17.94.** $\operatorname{sh} x - 12 \operatorname{th} x - 0{,}311 = 0.$

В задачах 17.95—17.100 найти меньший положительный корень уравнения.

17.95. $x^3 - 3x^2 + 1 = 0.$ **17.96.** $x^4 - 1{,}95x + 0{,}85 = 0.$

17.97. $x^5 - 2{,}95x + 0{,}15 = 0.$ **17.98.** $x^6 - 6x + 1 = 0.$

17.99. $x^6 - 6x^5 + 7x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 5x + 4 = 0.$

17.100. $\operatorname{sh} x - 8x + 1{,}294 = 0.$

В задачах 17.101—17.104 найти больший отрицательный корень уравнения.

17.101. $x^3 - 2{,}14x - 0{,}96 = 0.$

17.102. $x^4 - 3{,}9x^2 - 1{,}1x + 0{,}9 = 0.$

17.103. $x^7 - 1{,}95x - 0{,}35 = 0.$

17.104. $x^5 + 6x^4 - 8x^3 - 7x^2 + 5x - 3 = 0.$

В задачах 17.105—17.108 найти положительные корни уравнения.

17.105. $x^4 + 0{,}915x - 1{,}012 = 0.$

17.106. $x^6 - 0{,}243x - 0{,}257 = 0.$

17.107. $x^8 + 1{,}1x - 0{,}9 = 0.$ **17.108.** $x^5 - 40x^3 + 45x - 3 = 0.$

В задачах 17.109—17.112 найти отрицательные корни уравнения.

17.109. $x^3 + 3x^2 - 3 = 0.$ **17.110.** $x^4 + 5x - 2 = 0.$

17.111. $x^5 - 8x + 6 = 0.$ **17.112.** $x^4 - 4x^2 + 1 = 0.$

В задачах 17.113—17.116 найти наименьший положительный корень уравнения.

17.113. $x^3 - 6x^2 + 9x - 3 = 0.$ **17.114.** $x^4 - 6x + 3 = 0.$

17.115. $\operatorname{tg} x + x - 7{,}227 = 0.$ **17.116.** $x^2 - \cos \pi x = 0.$

17.4. Комбинированный метод

Комбинированный метод состоит в одновременном использовании метода хорд и метода касательных. Его удобно применять, если на исходном отрезке $[a, b]$ вторая производная $f''(x)$ сохраняет знак. В этом случае можно гарантировать приближение к корню с двух сторон: касательная пересекает ось Ox со стороны выпуклости, а хорда — со стороны вогнутости графика функции $y = f(x)$. Приближения по методу касательных будут располагаться с одной стороны корня, а приближения по методу хорд — с другой (рис. 17.6). Таким образом, получаются все более суживающиеся отрезки, внутри которых заключен корень. Длина последнего из них дает величину абсолютной погрешности приближенного значения корня.

Примеры. 1. Комбинированным методом с точностью до шести десятичных знаков решить уравнение $x^3 + 4x + 3 = 0$.

Графически отделяя корни уравнения, заключаем, что единственный действительный корень данного уравнения лежит на отрезке $[-1, 0]$. Можно указать отрезок меньшей длины, на котором находится корень, а именно отрезок $[-0{,}7; -0{,}6]$.

Проверим, для какой из этих двух точек выполняется условие $f(x_0)f''(x) > 0$. Поскольку $f''(x) = 6x$, $f''(-0{,}7) = -0{,}42$, $f(-0{,}7) = -0{,}143$ и $f(-0{,}7)\,f''(-0{,}7) > 0$, то, применяя метод Ньютона, нужно положить $x_0 = -0{,}7$. По методу Ньютона находим:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = -0{,}7 - \frac{-0{,}143}{5{,}47} = -0{,}7 + 0{,}026142 = -0{,}673858,$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = -0{,}673858 + \frac{0{,}001421}{5{,}362254} =$$

$$= -0{,}673858 + 0{,}000265 = -0{,}673593.$$

По методу хорд, положив $x_0' = -0{,}6$, $a = -0{,}7$, получим:

$$x_1' = \frac{x_0' f(a) - af(x_0')}{f(a) - f(x_0')} = \frac{-0{,}6(-0{,}143) + 0{,}7 \cdot 0{,}384}{-0{,}143 - 0{,}384} = \frac{0{,}3546}{-0{,}527} =$$

$$= -0{,}672865,$$

$$x_2' = \frac{x_1' f(a) - af(x_1')}{f(a) - f(x_1')} = \frac{-0{,}672865(-0{,}143) + 0{,}7 \cdot 0{,}003902}{-0{,}143 - 0{,}003902} =$$

$$= -0{,}673895.$$

Следовательно, корень находится на отрезке $[-0{,}673593; -0{,}673585]$. Полагая $a = -0{,}673593$, пользуясь формулой

$$x_3' = x_2' - \frac{f(x_2')}{f(a) - f(x_2')}(a - x_2'),$$

получаем

$$x_3' = -0{,}673585 + 1 \cdot 0{,}000008 =$$

$$= -0{,}673593.$$

Таким образом, $\xi = -0{,}673593$ — корень данного уравнения.

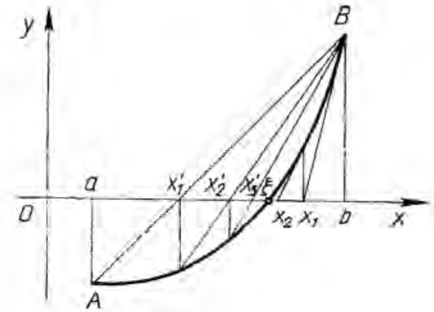


Рис. 17.6

2. Комбинированным методом найти меньший положительный корень уравнения $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ с точностью до шести десятичных знаков.

Искомый корень находится на отрезке $[0{,}6; 0{,}7]$. Для метода Ньютона $x_0 = 0{,}7$, для метода хорд $x_0' = 0{,}6$, $b = 0{,}7$.

По соответствующим формулам находим:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0{,}7 - \frac{-0{,}127}{-2{,}73} = 0{,}653480;$$

$$x_1' = \frac{x_0' f(b) - bf(x_0')}{f(b) - f(x_0')} = \frac{0{,}6(-0{,}127) - 0{,}7 \cdot 0{,}136}{-0{,}127 - 0{,}136} = 0{,}651711;$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0{,}653480 - \frac{-0{,}002049}{-2{,}639772} = 0{,}652704;$$

$$x_2' = \frac{x_1' f(b) - b f(x_1')}{f(b) - f(x_1')} = \frac{0,651711\,(-0,002049) - 0,653480 \cdot 0,002618}{-0,002049 - 0,002618} =$$

$$= \frac{-0,001335 - 0,001711}{-0,004667} = 0,652668;$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 0,652704 - \frac{-0,0000006}{-2,6381579} = 0,65270378;$$

$$x_3' = x_2' - \frac{f(x_2')}{f(x_2) - f(x_2')}(x_2 - x_2') = 0,652668 -$$

$$- \frac{0,0000944}{-0,0000006 - 0,0000944}(0,652704 - 0,652668) =$$

$$= 0,652668 + 0,00003577 = 0,65270377.$$

Итак, меньший положительный корень ξ данного уравнения удовлетворяет неравенствам $0,65270377 < \xi < 0,65270378$.

В задачах 17.117—17.134 комбинированным методом найти корни уравнения.

17.117. $x^3 + 6x - 5 = 0$. **17.118.** $x^3 - 6x + 7 = 0$.

17.119. $x^3 + 3x - 1 = 0$. **17.120.** $x^3 - 3x^2 - 1 = 0$.

17.121. $x^3 + 6x^2 + 9x - 8 = 0$. **17.122.** $x^3 - 1,2x + 0,7 = 0$.

17.123. $x^3 + 1,015x + 0,985 = 0$.

17.124. $x^4 + 1,015x - 1,007 = 0$.

17.125. $x^5 - 5x + 5 = 0$. **17.126.** $x^5 - 0,52x - 4,08 = 0$.

17.127. $x^5 + 1,025x - 3,116 = 0$.

17.128. $x^7 + x - 1 = 0$.

17.129. $x^7 + 1,1x + 1,9 = 0$. **17.130.** $x^7 + 1,2x + 2,3 = 0$.

17.131. $x^7 - 0,525x + 1,485 = 0$.

17.132. $x^7 - 0,496x + 1,014 = 0$.

17.133. $x^8 + 4x - 2 = 0$. **17.134.** $\operatorname{th} x + x^2 - 3,487 = 0$.

В задачах 17.135—17.138 найти больший положительный корень уравнения.

17.135. $x^3 - 3x + 1 = 0$. **17.136.** $2x^3 - 4x^2 + 1 = 0$.

17.137. $x^4 - 2,15x + 0,95 = 0$. **17.138.** $x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 3x + 2 = 0$.

В задачах 17.139—17.142 найти меньший отрицательный корень уравнения.

17.139. $x^3 + 4x^2 - 6 = 0$. **17.140.** $x^5 + 5x^4 + 5x^3 - 3 = 0$.

17.141. $15x^7 - 84x^5 + 35x^3 - 15 = 0$.

17.142. $x^7 + 8x^6 - 6x^5 + 4x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 9x - 6 = 0$.

В задачах 17.143—17.146 найти положительные корни уравнения.

17.143. $x^3 + 2x - 1 = 0$. **17.144.** $x^4 + x - 1 = 0$.

17.145. $x^5 + 7x - 3 = 0$. **17.146.** $x^6 - 0,225x - 0,245 = 0$.

В задачах 17.147—17.150 найти отрицательные корни уравнения.

17.147. $x^3 - 12x + 9 = 0$. **17.148.** $x^4 - x - 0,02 = 0$.

17.149. $x^6 - 4x^4 + 9x^2 - 5 = 0$. **17.150.** $x^8 + 0,8x - 0,8 = 0$.

17.5. Метод итераций

Если каким-либо способом получено приближенное значение x_0 корня уравнения (17.1), то уточнение корня можно осуществить **методом последовательных приближений**, или **методом итераций**. Для этого уравнение (17.1) представляют в виде

$$x = \varphi(x), \tag{17.11}$$

что всегда можно сделать, и притом многими способами, например

$$x = x + cf(x),$$

где c — произвольная постоянная.

Пусть число x_1 есть результат подстановки x_0 в правую часть уравнения (17.11): $x_1 = \varphi(x_0)$, $x_2 = \varphi(x_1)$, $x_3 = \varphi(x_2)$, ...,

$$x_n = \varphi(x_{n-1}). \tag{17.12}$$

Процесс последовательного вычисления чисел x_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) по формуле (17.12) называется *методом последовательных приближений* или *методом итераций*.

Итерационный процесс сходится ($\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$), если на отрезке $[a, b]$, содержащем корень ξ, выполнено условие

$$|\varphi'(x)| \leqslant q < 1. \tag{17.13}$$

Примеры. 1. Методом итераций найти действительные корни уравнения

$$x^5 + x - 3 = 0.$$

Графически отделяя корни данного уравнения, заключаем, что уравнение имеет единственный действительный корень, принадлежащий отрезку [1, 2]. Для решения этого уравнения методом итераций не имеет смысла представлять его, например, в виде $x = 3 - x^5$, так как функция $\varphi(x) = 3 - x^5$ имеет производную $\varphi'(x) = -5x^4$, для которой $|\varphi'(x)| = |-5x^4| > 1$ на отрезке [1, 2], т. е. не выполняется условие (17.13). Если же представить данное уравнение в виде

$$x = \sqrt[5]{3-x} \quad (\varphi(x) = \sqrt[5]{3-x}),$$

то $\varphi'(x) = -1/(5\sqrt[5]{(3-x)^4})$ и $|\varphi'(x)| < 1/5 < 1$ при $1 < x < 2$. Поскольку в этом случае условие (17.13) выполнено, процесс итераций будет сходиться.

Вычисления будем вести с помощью натуральных логарифмов. Логарифмируя уравнение $x = \sqrt[5]{3-x}$, получаем

$$\ln x = \frac{1}{5}\ln(3-x).$$

Принимая $x_0 = 1$ и подставляя это значение в правую часть последнего равенства, находим

$$\ln x_1 = \frac{1}{5}\ln 2 = \frac{1}{5}\cdot 0,6931 = 0,1386,$$

откуда $x_1 = 1,1487$.

Вычисления последующих приближений проводим по формуле

$$\ln x_n = \frac{1}{5} \ln (3 - x_{n-1})$$

и записываем результаты в табл. 17.4.

Таблица 17.4

n	x_{n-1}	$3 - x_{n-1}$	$\ln(3 - x_{n-1})$	$\ln x_n$	x_n
1	1,1487	1,8513	0,6159	0,1232	1,1311
2	1,1311	1,8689	0,6253	0,1251	1,1332
3	1,1332	1,8668	0,6242	0,1248	1,1329
4	1,1329	1,8671	0,6244	0,1249	1,1330
5	1,1330	1,8670	0,6243	0,1249	1,1330

2. Методом последовательных приближений найти отрицательный корень уравнения $x^4 + x - 3 = 0$.

Данное уравнение имеет два действительных корня; отрицательный корень находится на отрезке $[-1,5;\ -1,4]$, так как выполняется условие $f(-1,5) \times f(-1,4) < 0$.

Перепишем данное уравнение в виде

$$x = x + C(x^4 + x - 3),$$

где C — произвольная постоянная. Выберем значение C таким, чтобы для функции $\varphi(x) = x + C(x^4 + x - 3)$ на отрезке $[-1,5;\ -1,4]$ выполнялось условие $\max|\varphi'(x)| = q < 1$. В качестве такого значения можно взять $C = 0,1$. Тогда

$$\varphi(x) = x + 0,1(x^4 + x - 3),\ \varphi(x) = 0,1x^4 + 1,1x - 0,3,$$

$$\varphi'(x) = 0,4x^3 + 1,1,\quad \max_{-1,5 \leqslant x \leqslant -1,4} |\varphi'(x)| = 0,25 < 1,$$

т. е. выполнено условие (17.13) для функции $\varphi(x)$ на отрезке $[-1,5;\ -1,4]$.

Взяв $x_0 = -1,45$, вычисления последующих приближений выполним по формуле

$$x_{n+1} = 0,1x_n^4 + 1,1x_n - 0,3$$

и запишем результаты в табл. 17.5, из которой видно, что $x = -1,45262$ — корень данного уравнения.

Таблица 17.5

n	x_n	x_n^2	x_n^4	$0,1x_n^4$	$1,1x_n$	$x_{n+1} = 0,1x_n^4 + 1,1x_n - 0,3$
0	−1,45	2,1025	4,42051	0,44205	−1,595	−1,45295
1	−1,45295	2,11106	4,45657	0,44566	−1,59825	−1,45259
2	−1,45259	2,11002	4,45218	0,44522	−1,59785	−1,45263
3	−1,45263	2,11013	4,45265	0,44527	−1,59789	−1,45262
4	−1,45262	2,11011	4,45256	0,44526	−1,59788	−1,45262

В задачах 17.151—17.178 методом итераций найти действительные корни уравнения.

17.151. $x^3 + 2x - 4 = 0$.
17.152. $x^3 + 3x + 2 = 0$.
17.153. $x^3 + 4x^2 - 1 = 0$.
17.154. $x^3 - 5x^2 + 3x - 2 = 0$.
17.155. $x^4 - 6x + 3 = 0$.
17.156. $x^4 + 2x - 1 = 0$.
17.157. $x^5 - 6x + 4 = 0$.
17.158. $x^5 + 4x - 2 = 0$.
17.159. $x^6 - x - 1 = 0$.
17.160. $x^6 + 3x + 1 = 0$.
17.161. $x^7 - 7x + 5 = 0$.
17.162. $x^7 + 2x - 1 = 0$.
17.163. $x^8 - 3x + 1 = 0$.
17.164. $x^9 + 5x - 3 = 0$.
17.165. $x^9 - 4x + 2 = 0$.
17.166. $x^{10} - 3x + 1 = 0$.
17.167. $e^{-x} - x - 2 = 0$.
17.168. $x + \ln x - 2 = 0$.
17.169. $2^x + 2x - 3 = 0$.
17.170. $\ln x - x + 3 = 0$.
17.171. $3^x - 6x + 1,5 = 0$.
17.172. $e^x + x - 2 = 0$.
17.173. $e^x + \frac{1}{x} + 2 = 0$.
17.174. $e^x - \frac{2}{x+1} - 4 = 0$.
17.175. $\operatorname{sh} x + 2x - 1 = 0$.
17.176. $\operatorname{ch} x - x - 3 = 0$.
17.177. $\operatorname{sh} x - 12 \operatorname{th} x - 0,311 = 0$.
17.178. $\operatorname{tg} x + x - 7,227 = 0$.

ОТВЕТЫ

1

1.4. 1) 3; 2) −7; 3) 14; 4) −5. **1.5.** 1) 5; 2) 13; 3) 6; 4) 5. **1.6.** 1) −3; 2) 1. **1.7.** 1) 3; 2) 8. **1.8.** 1) 0,2; 2) −5/3; 3) 0. **1.9.** 1) $M(17/4)$; 2) $M(3)$. **1.10.** 1) $C(6)$; 2) $C(3)$; 3) $C(-3)$; 4) $C(0)$; 5) $C(3)$. **1.11.** $A(13)$. **1.12.** $B(2)$. **1.13.** $M(-8)$, $N(10)$. **1.14.** $M(8)$, $K(1)$, $N(15)$. **1.15.** $A(-8)$, $B(7)$. **1.19.** $A_1(3, -4)$. **1.20.** $B_1(3, 1)$. **1.21.** $C_1(-4, -7)$. **1.22.** $A_1(-1, 2)$. **1.23.** $B_1(-4, 2)$. **1.24.** 3) $A'(-1, -2)$, $B'(-2, -6)$, $C'(-4, -5)$; 4) $A'(2, 1)$, $B'(6, 2)$, $C'(5, 4)$. **1.28.** $A(1, \sqrt{3})$, $B(-1, 1)$, $F(-5, 0)$. **1.29.** $A(\sqrt{2}, 3\pi/4)$, $B(2, \pi/2)$, $E(\sqrt{2}, \pi/4)$. **1.30.** 2) $7\sqrt{2}$; 3) $\sqrt{29}$; 4) 5; 6) 15. **1.31.** 32. **1.32.** 25. **1.34.** $C(9, 2)$, $D(5, -2)$, $C_1(1, 10)$, $D_1(-3, 6)$. **1.35.** $32\sqrt{3}$. **1.36.** $B(2, 3)$, $D(-2, -1)$. **1.37.** 16. **1.38.** $D(1, 2)$. **1.39.** 20. **1.42.** $\angle A$. **1.43.** Треугольник остроугольный. **1.44.** $\angle A = \angle B = 45°$, $\angle C = 90°$. **1.45.** $N(5, 0)$. **1.46.** $N(0, 6)$, $N_1(0, -2)$. **1.47.** $C(1, 0)$, $C_1(6, 0)$. **1.48.** $S(-5, 0)$, $R = 5$. **1.49.** $N(5, 5)$, $N_1(13, 13)$. **1.50.** 5. **1.51.** $B(-3, 4)$, $D(1, 2)$. **1.52.** $M(-3, 5)$. **1.53.** 1) $P(4, 1)$; 2) $Q(-4, -1)$; 3) $L(-3, -3)$. **1.54.** $L(1, 5)$, $M(0, -4)$, $N(5, -1)$. **1.55.** 5. **1.56.** $B(-10, 9)$. **1.57.** $C(2, -3)$. **1.58.** $B(-2, 1)$. **1.59.** $M(5, -4)$, $N(-1, 5)$. **1.60.** $A(-2, -4)$, $B(2, 6)$, $C(6, -2)$. **1.62.** $D(3, -1)$, $S(1, 1)$. **1.64.** $A(-7, -8)$, $B(-6, -7)$, $C(-5, -6)$, $D(-4, -5)$, $E(12, 11)$. **1.65.** $N(-1/3; 11/3)$, $N_1(13, -3)$. **1.66.** $10\sqrt{2/3}$. **1.67.** 4. **1.68.** $A(-5, -1)$, $D(4, 5)$. **1.69.** $\lambda_1 = AB/BC = 1/3$. **1.70.** $M(3, 2)$. **1.72.** 5. **1.73.** 10. **1.74.** $M(1, 2)$. **1.75.** $M(11/15, 23/15)$. **1.76.** 1) 24; 2) 18; 3) 6. **1.77.** $5\sqrt{2}/2$. **1.79.** 30. **1.80.** 12. **1.81.** 20. **1.82.** $C(0, 2)$, $C_1(0, 22)$. **1.83.** $M(11/5, 21/5)$. **1.84.** $M(24/17, 7/3)$. **1.85.** $C(5, 2)$, $C_1(2, 2)$. **1.86.** $16x + 6y - 69 = 0$. **1.87.** $M(0, 10)$, $N(5, 0)$. **1.88.** $M(29/5, 7/5)$. **1.89.** $x^2 + y^2 = 25$. **1.90.** $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 100$. **1.91.** $M(4, 3)$, $N(4, -3)$. **1.92.** $M(-7, 0)$, $N(7, 0)$, $P(0, -7)$, $Q(0, 7)$. **1.93.** $4x^2 + 4y^2 = 9$. **1.94.** $x^2 + y^2 = 64$. **1.95.** $M(-3, 4)$, $N(4, 3)$. **1.96.** $3x + 4y = 0$. **1.97.** $M(1, 2)$, $N(2, 2)$. **1.98.** $M(1, 1)$, $N(1, 5)$. **1.99.** $M(0, -4)$, $N(1, -9)$. **1.100.** $2\sqrt{2}$. **1.101.** $\sqrt{10}$. **1.102.** $\rho\cos\varphi = 5$. **1.103.** $\varphi = \pi/6$. **1.104.** $\operatorname{tg}\varphi = -1$. **1.105.** $\rho\sin\varphi - 3 = 0$, $\rho\sin\varphi + 3 = 0$. **1.106.** $\rho = 2a\cos\varphi$. **1.107.** $\rho + 10\sin\varphi = 0$ (центр окружности лежит ниже полярной оси); $\rho - 10\sin\varphi = 0$ (центр окружности лежит выше полярной оси). **1.108.** $\rho^2 - 2\rho\rho_0\cos(\varphi - \varphi_0) = R^2 - \rho_0^2$. **1.109.** $\rho = a(1 \pm \sin\varphi)/\cos\varphi$. **1.111.** 1) $\rho = R$; 2) $\operatorname{tg}\varphi = 1$; 3) $\operatorname{tg}\varphi = -1$; 4) $\rho^2\cos 2\varphi = R^2$; 5) $\rho = a\sin 2\varphi$. **1.112.** 1) $x = a$; 2) $x^2 + y^2 = 2ax$; 3) $y^2 = x(x-a)^2/(2a-x)$; 4) $(x^2 + y^2)y^2 = a^2x^2$; 5) $y^2 = 4a(a-x)$; 6) $a^2/x^2 + a^2/y^2 = 1$; 7) $(x^2 + y^2 + 2ax)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$. **1.113.** $\rho = 2a\cos\varphi + b$. **1.114.** $\rho = a\sin 2\varphi$. **1.115.** $\rho = a\varphi$, где $a = v/w$. **1.119.** $y = -x$. **1.120.** $x + y = 2$. **1.121.** $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$. **1.123.** $y = x^2$. **1.124.** $y = x^2 - 2x + 2$. **1.125.** $y = 6/x$. **1.126.** $x^2 + y^2 = 1$. **1.127.** $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. **1.128.** $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$. **1.129.** $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 4$. **1.130.** $(x+4)^2 + (y-6)^2 = 25$. **1.131.** $y = x^2 - 6x + 12$. **1.132.** $x = y^2 - 4y + 2$. **1.133.** $xy + 3y - 4 = 0$. **1.134.** $xy + 11x - 2 = 0$. **1.135.** $x = a\cos t$, $y = (a+b)\sin t/2$. (*Указание*. Воспользоваться параметрическими уравнениями окружности (см. пример 1, § 1.8) и параметрическими уравнениями эллипса (см. задачу 1.127).) **1.136.** $x = a(\cos t + \cos\operatorname{arctg}(b\operatorname{tg} t/a))/2$, $y = a(\sin t + \sin\operatorname{arctg}(b\operatorname{tg} t/a))/2$.

2

2.1. 1) $y = x + 2$. **2.2.** $3x - 4y = 0$. **2.3.** 2) $y = x - 3$. **2.4.** 3) $y = x$. **2.6.** 2) $\varphi = 135°$. **2.8.** 1) $a = 3$, $b = -2$. **2.10.** 10. **2.12.** $C = 20$. **2.14.** $B = 3$, $B_1 = -3$.

2.17. 2) $\varphi = 45°$. **2.21.** $2x - 5y - 26 = 0$. **2.22.** $7x - 4y + 34 = 0$. **2.23.** $11x - 5y = 0$, $5x + 11y = 0$. **2.24.** $5x - 9y - 19 = 0$, $9x + 5y - 13 = 0$. **2.25.** $4x - 3y - 16 = 0$, $4x - 3y + 9 = 0$. **2.26.** $6x - 5y - 11 = 0$. **2.27.** $7x - 8y - 6 = 0$. **2.28.** $5x - 2y - 1 = 0$, $2x + 5y - 12 = 0$. **2.29.** $P(2; 3{,}5)$. **2.30.** $M(0, 2)$. **2.31.** $x = -2 + t$, $y = -2 + 4t$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$; $x = -2 + 8t$, $y = -2 + 4t$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$; $y - 2 = 0$ $(-1 \leqslant x \leqslant 6)$. **2.33.** $11x + 3y - 10 = 0$, $7x + 9y - 30 = 0$, $2x - 3y + 10 = 0$. **2.34.** $M(2, -3)$. **2.35.** $3x - 8y + 2 = 0$. **2.36.** $M(4/3, 2)$. **2.37.** 1) 0,8; 2) 0,5; 3) $3\sqrt{5}/5$; 4) 2. **2.38.** 1) 2; 2) 1; 3) 0. **2.40.** 2. **2.41.** 4. **2.42.** 1. **2.43.** 9. **2.44.** $x + y - 11 = 0$, $x - y + 3 = 0$. **2.45.** $3x - 4y - 25 = 0$, $3x - 4y - 45 = 0$. **2.47.** $(x+2)^2 + y^2 = 25$. **2.48.** 1) $a = -3$, $b = 4$, $R = 6$. **2.49.** 1) $M(2, -3)$. **2.50.** $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$; $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$. **2.52.** $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 25$; $(x-25)^2 + (y-13)^2 = 625$. **2.53.** $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$. **2.54.** $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 16$. **2.55.** 1) Полуокружность радиусом $R = 4$ с центром в начале координат и расположенная выше оси Ox. **2.56.** 4. **2.57.** $2x + 3y = 0$. **2.58.** 1) Пересекает. **2.59.** 2) Не имеют общих точек; 3) касаются. **2.61.** $3x + 4y + 7 = 0$. **2.62.** 5. **2.63.** $(x-6)^2 + y^2 = 18$; $(x-30)^2 + y^2 = 450$. **2.64.** $C(1, -3)$, $R = 5$. **2.65.** $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 25$. **2.67.** $x^2/25 + y^2/16 = 1$. **2.68.** $x^2/144 + y^2/169 = 1$. **2.69.** 1) $x^2/64 + y^2/36 = 1$. **2.70.** 2) $x^2/25 + y^2/169 = 1$. **2.71.** $P(-3, 2)$, $Q(3, -2)$, $S(-3, -2)$. **2.73.** 1) $a = 6$, $b = 2\sqrt{5}$, $F_1(-4, 0)$, $F_2(4, 0)$, $\varepsilon = 2/3$. **2.75.** $\varepsilon = 0{,}5$. **2.77.** $x = \pm 10$. **2.78.** $d = 12$. **2.79.** 2) $x^2/16 + y^2/12 = 1$. **2.80.** 2) $x^2/5 + y^2/9 = 1$. **2.81.** 2) $x^2/64 + y^2/100 = 1$. **2.82.** $x^2/36 + y^2/20 = 1$. **2.85.** $r_1 = 5{,}5$, $r_2 = 2{,}5$. **2.87.** $M(-1; 1{,}5)$, $N(-1; -1{,}5)$. **2.89.** 1) Пересекаются; 2) касаются; 3) не имеют общих точек. **2.90.** $x^2/16 - y^2/9 = 1$. **2.91.** $-x^2/64 + y^2/36 = 1$. **2.92.** 1) $x^2/49 - y^2/25 = 1$. **2.93.** 2) $-x^2/16 + y^2/9 = 1$. **2.95.** 2) $M(4\sqrt{2}, \sqrt{14})$, $N(4\sqrt{2}, -\sqrt{14})$. **2.96.** 2) $a = 8$, $b = 6$, $F_1(-10, 0)$, $F_2(10, 0)$, $\varepsilon = 5/4$, $y = \pm(3/4)x$. **2.98.** 3) $x = \pm 3{,}5$, $d = 7$. **2.99.** 16. **2.100.** 1. **2.101.** 2) $x^2/56 - y^2/8 = 1$. **2.102.** 3) $-x^2/5 + y^2/20 = 1$. **2.103.** 4) $x^2/16 - y^2/9 = 1$. **2.104.** $2xy = 1$. **2.109.** 1) $M(2,1)$, $N(3,2)$. **2.110.** 1) Пересекаются в точках $M(1, -1)$, $N(-2, 4)$. **2.111.** 2) $x^2 = 6y$; 3) $y^2 = -8x$. **2.112.** 1) $F(2, 0)$, $x = -2$. **2.113.** 1) $y^2 = 16x$. **2.114.** 3) $y^2 = 9x$; 4) $2x^2 = -y$. **2.115.** 5,2. **2.116.** 51/7. **2.117.** $M(4,4)$, $N(4, -4)$. **2.118.** $M(4,2)$, $N(-4,2)$. **2.119.** 1) $M(1, -4)$, $N(4, 8)$. **2.120.** 3) Касаются в точке $M(2, -4)$. **2.121.** 8. **2.122.** 6. **2.123.** $4q\sqrt{3}$. **2.124.** $y^2 = -4(x-9)$, $A(9,0)$, $B(0, -6)$, $C(0,6)$. **2.127.** $(X^2/4) + (Y^2/9) = 1$; эллипс с центром в точке $O_1(1, -1)$. **2.128.** $(Y^2/9) - (X^2/4) = 1$; $O_1(-1,3)$; гипербола, пересекающая ось Oy. **2.129.** $Y^2 = -2X$, $O_1(4,1)$; парабола с осью, параллельной оси Ox. **2.130.** $X^2 = -4Y$. **2.131.** $XY = -4$. **2.132.** $(X^2/25) + (Y^2/9) = 1$, $O_1(2,1)$. **2.133.** $(x+2)^2/4 + (y-3)^2/2 = 1$. **2.134.** $(x-1)^2/16 - (y+2)^2/9 = 1$. **2.135.** $(Y^2/4) - (X^2/9) = 1$, $O_1(-1,1)$. **2.136.** $Y = 2X^2$, $O_1(-1, -3)$. **2.137.** $X = Y^2$, $O_1(-2,1)$. **2.138.** $Y = -3X^2$, $O_1(1, 2)$. **2.139.** $X = -4Y^2$, $O_1(5, -1)$. **2.140.** $XY = 8$, $O_1(3, -2)$. **2.141.** $XY = -6$, $O_1(-5,1)$. **2.142.** $(X^2/4) + (Y^2/9) = 1$, $O_1(1, -2)$. **2.143.** $(3x - 2y + 8)(3x + 2y + 4) = 0$; две пересекающиеся прямые. **2.144.** $(3x - 4y + 23)(3x + 4y + 7) = 0$. **2.145.** $(x+1) \times (x+7) = 0$; две прямые, параллельные оси Oy. **2.146.** $(y-1)(y-5) = 0$. **2.147.** Точка $C(-1, 3)$. **2.148.** $X^2 + Y^2 = 4$, $O_1(1, -2)$. **2.149.** Точка $M(-3,2)$. **2.150.** Уравнению не удовлетворяют координаты ни одной точки. **2.151.** $-4X^2 + 9Y^2 = 64$, $O_1(1,2)$. **2.152.** $(x - 2y + 14)(x + 2y - 2) = 0$. **2.153.** $(2x - y + 3) \times (2x - y - 1) = 0$. **2.154.** $3x - 4y + 2 = 0$, $3x - 4y + 2 = 0$; две совпадающие прямые. **2.155.** Гипербола $2X^2 - Y^2 = 2$, $\sin\alpha = -\sqrt{2}/2$, $\cos\alpha = \sqrt{2}/2$, $\operatorname{tg}\alpha = -1$, $O_1(-1, -2)$; $2Y^2 - X^2 = 2$ при $\sin\alpha = \cos\alpha = \sqrt{2}/2$, $\operatorname{tg}\alpha = 1$. **2.156.** Эллипс $6X^2 + Y^2 = 6$, $\sin\alpha = -\sqrt{2}/2$, $\cos\alpha = \sqrt{2}/2$, $\operatorname{tg}\alpha = -1$, $O_1(-1, -1)$; $X^2 + 6Y^2 = 6$, $\operatorname{tg}\alpha = 1$. **2.157.** $X^2 = (3/\sqrt{5})Y$, $\operatorname{tg}\alpha = 2$, $O_1(-2,1)$; $Y^2 = -(3/\sqrt{5})X$, $\operatorname{tg}\alpha = -1/2$. **2.158.** $X^2 + Y^2 = 9/4$. **2.159.** $x - y + 2 = 0$, $x - y + 2 = 0$. **2.160.** $x - y + 1 = 0$, $x + 3y = 0$. **2.161.** $x + 2y = 0$, $x + 2y - 3 = 0$. **2.162.** $X^2 + 2Y^2 = 2$, $\operatorname{tg}\alpha = -1$, $O_1(-1, -1)$. **2.163.** $X = 5Y^2$, $\operatorname{tg}\alpha = 3/4$, $O_1(1, 1)$. **2.164.** $4X^2 - Y^2 = -4$, $\operatorname{tg}\alpha = 1/2$, $O_1(2, -2)$. **2.165.** $7X^2 - Y^2 = 7$, $\alpha = \pi/4$, $O_1(2, -2)$. **2.166.** $7X^2 + Y^2 = 7$, $\alpha = \pi/4$, $O_1(1, -1)$. **2.167.** $X^2 = -Y$, $\operatorname{tg}\alpha = 3/4$, $O_1(-1, 1)$. **2.168.** $X^2 - 5Y^2 = 5$, $\operatorname{tg}\alpha = -1$, $O_1(1, -1)$. **2.169.** $5X^2 + Y^2 = 5$, $\operatorname{tg}\alpha = 1$, $O_1(1, 0)$. **2.170.** $Y^2 = \sqrt{2}X$, $\operatorname{tg}\alpha = 1$, $O_1(-2, 1)$. **2.171.** $5X^2 - Y^2 = 5$, $\operatorname{tg}\alpha = -1/2$, $O_1(-1, -1)$. **2.172.** $X^2 + 5Y^2 = 5$, $\operatorname{tg}\alpha = 2$, $O_1(0, 1)$. **2.173.** $Y^2 = 4\sqrt{2}X$, $\operatorname{tg}\alpha = -1$, $O_1(2, -1)$. **2.174.** $3Y^2 - X^2 = 3$, $\operatorname{tg}\alpha = 2$, $O_1(-1, -3)$. **2.175.** $3X^2 + Y^2 = 3$, $\operatorname{tg}\alpha = -1/2$, $O_1(-1, -1)$. **2.176.** $Y^2 =$

$=(4\sqrt{5})X$, $\operatorname{tg}\alpha=2$, $O_1(-1, -2)$. **2.177.** $2X^2-Y^2=2$, $\operatorname{tg}\alpha=1/2$, $O_1(-2, 2)$. **2.178.** $2X^2+Y^2=2$, $\operatorname{tg}\alpha=1/2$, $O_1(2, -1)$. **2.179.** $X^2-4Y^2=4$, $\operatorname{tg}\alpha=1$, $O_1(1, -1)$. **2.180.** $X^2=(2/\sqrt{5})Y$, $\operatorname{tg}\alpha=1/2$, $O_1(1, -1)$. **2.181.** $3X^2-Y^2=3$, $\operatorname{tg}\alpha=1$, $O_1(-1, 1)$. **2.182.** $X^2+3Y^2=3$, $\operatorname{tg}\alpha=1$, $O_1(-3, -3)$. **2.183.** $Y^2=(1/\sqrt{5})X$, $\operatorname{tg}\alpha=1/2$, $O_1(-1, 1)$. **2.184.** $9X^2+Y^2=9$, $\operatorname{tg}\alpha=-1$, $O_1(-2, 2)$. **2.185.** $Y^2-9X^2=9$, $\operatorname{tg}\alpha=-1$, $O_1(-2, 1)$. **2.186.** $X^2-8Y^2=8$, $\operatorname{tg}\alpha=1$, $O_1(-1, -1)$. **2.187.** $X^2+8Y^2=8$, $\operatorname{tg}\alpha=1$, $O_1(-2, -2)$. **2.188.** $X^2-6Y^2=6$, $\operatorname{tg}\alpha=1$, $O_1(-1, -1)$. **2.189.** $4X^2+Y^2=4$, $\operatorname{tg}\alpha=1/2$, $O_1(1, -1)$. **2.190.** $X^2+4Y^2=4$, $\operatorname{tg}\alpha=1$, $O_1(-1, -1)$. **2.191.** $X^2-4Y^2=8$, $\operatorname{tg}\alpha=1$, $O_1(-2, -2)$. **2.192.** $7X^2+5Y^2=8$, $\operatorname{tg}\alpha=1$, $O_1(-1, -1)$. **2.193.** $X^2+Y^2=9$, $O_1(1, -2)$. **2.194.** $x+y-1=0$, $x+y+1=0$. **2.195.** $x-y+2=0$, $x+y+1=0$. **2.196.** $x+y+1=0$, $x+y+1=0$. **2.197.** $9X^2+Y^2=-9$. **2.198.** $x-3y+2=0$, $3x-y-2=0$.

3

3.1. $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=5$; $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|=5$. **3.2.** $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=2\sqrt{3}$, $|\mathbf{b}-\mathbf{a}|=2$. **3.3.** Векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ коллинеарны, $\overline{AD}=\overline{BC}$. **3.5.** $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{0}$. **3.6.** $\mathbf{c}+\mathbf{a}/2$. **3.8.** $(\overline{AB}+\overline{AC})/2$. **3.10.** $\overline{AD}=(\overline{AB}|\overline{AC}|+\overline{AC}|\overline{AB}|)/(|\overline{AB}|+|\overline{AC}|)$. **3.13.** $\mathbf{r}=(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2)/2$. **3.14.** $\mathbf{r}=(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3)/3$. **3.15.** $\mathbf{r}=(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_3)/2$. **3.16.** $\mathbf{r}=(m_1\mathbf{r}_1+m_2\mathbf{r}_2+\ldots+m_n\mathbf{r}_n)\times\times(m_1+m_2+\ldots+m_n)^{-1}$. **3.17.** 1) 4; 2) 0; 3) -5. **3.18.** 1) $\mathbf{a}=(2, \sqrt{2}, 2)$; 2) $\mathbf{a}=(-4\sqrt{2}, 4, 4)$. **3.19.** 1) $\mathbf{a}=(2, -3, 5)$, $\mathbf{a}_x=2\mathbf{i}$, $\mathbf{a}_y=-3\mathbf{j}$, $\mathbf{a}_z=5\mathbf{k}$; $\mathbf{b}=(6, 4, -7)$. **3.20.** $3\mathbf{a}=(3, -6, 9)$; $(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})=(0, 3, 12)$. **3.21.** 1) $\overline{M_1M_2}=(-2, 2, -1)$, $|\overline{M_1M_2}|=3$. **3.22.** $|AA'|=3$, где $A'(5, 3, -3)$ — середина BC. **3.23.** $\mathbf{r}=|\overline{OM}|=(2, 1, -2)$, $|\mathbf{r}|=3$. **3.25.** $D(-5, -2, 4)$, $P=4\sqrt{278}$, $d_1=6\sqrt{6}$, $d_2=8\sqrt{14}$. **3.26.** $\sqrt{870}/8$. **3.27.** $A(1, 1, 1)$, $B(7, -8, 4)$. **3.28.** $|\mathbf{F}|=30$. **3.29.** $|\mathbf{F}|=10$, $\alpha=60°$, $\beta=45°$, $\gamma=120°$. **3.30.** $|\mathbf{F}|=6$; $\cos\alpha=2/3$, $\cos\beta=-2/3$, $\cos\gamma=1/3$. **3.31.** 1) 10; 3) 0; 4) -6. **3.32.** 1) 5; 2) 3; 5) 0. **3.33.** 1) $\varphi=\pi/2$; 2) $\varphi=\arccos(63/65)$; 3) $\varphi=\pi/4$. **3.34.** 1) -43; 5) 142. **3.35.** $\angle A=45°$; $\angle B=90°$; $\angle C=45°$. **3.36.** 4/15. **3.37.** $\text{пр}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}=4/3$, $\text{пр}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}=4/15$. **3.38.** 4. **3.39.** $4\sqrt{21}/7$. **3.40.** $\mathbf{x}=(-2, 4, -4)$. **3.41.** $\mathbf{x}=(7, -4, 0)$. **3.42.** $\mathbf{x}=(1, 2, -1)$. **3.43.** $-1{,}5$. **3.45.** $\alpha=2$. **3.46.** 135°. **3.48.** 16. **3.49.** 23. **3.50.** 4. **3.52.** 2) $38\mathbf{i}-26\mathbf{j}-21\mathbf{k}$; 3) $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]=(20, -20, -10)$; 4) $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]=(-38, 26, 21)$. **3.53.** 1) $23[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$; 2) $47[\mathbf{a}, \mathbf{b}]+4[\mathbf{b}, \mathbf{c}]-38[\mathbf{a}, \mathbf{c}]$; 3) $-2\mathbf{i}+28\mathbf{j}+22\mathbf{k}$. **3.55.** 15. **3.56.** 15. **3.57.** 14. **3.58.** 5. **3.59.** 5. **3.60.** 1) $\sqrt{65}/9$; 4) 1. **3.61.** $[[\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}]=(1, -11, 2)$, $[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]]=(-54, 23, 4)$. **3.69.** $[\mathbf{a}, \mathbf{F}]=(-27, 27, -27)$, $\mathbf{a}=\overline{OA}$. **3.70.** $[\mathbf{a}, \mathbf{F}]=(26, -16, 2)$, $\mathbf{a}=\overline{BA}$. **3.71.** $|[\mathbf{a}, \mathbf{F}]|=15$, $\cos\alpha=2/3$, $\cos\beta=2/15$, $\cos\gamma=-11/15$. **3.72.** $|[\mathbf{a}, \mathbf{F}]|=28$, $\cos\alpha=3/7$, $\cos\beta=6/7$, $\cos\gamma=-2/7$. **3.73.** $|[\mathbf{a}, \mathbf{F}]|=15$, $\cos\alpha=2/3$, $\cos\beta=2/15$, $\cos\gamma=11/15$. **3.74.** 1) Правая; 2) левая; 4) векторы **a**, **b**, **c** компланарны. **3.75.** 1) 46; 2) -30; 3) 18; 4) -9. **3.76.** 1) Правая; 2) левая; 5) векторы **a**, **b**, **c** компланарны. **3.77.** 1) Да; 3) нет; 4) да. **3.78.** 1) 13; 2) 76; 3) 12; 4) 0. **3.79.** $V=\frac{1}{6}\operatorname{mod}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}$.

3.80. $\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}=0$. **3.81.** 1) 23/3; 2) 62/3. **3.83.** 22/3. **3.84.** $D(0, 0, 1)$, $D_1(0, 0, 9)$. **3.85.** $D(0, 0, 0)$, $D_1(12, 0, 0)$.

4

4.1. 1) Проходит через начало координат; 2) параллельна оси Ox; 5) проходит через ось Ox; 8) параллельна плоскости Oyz; 11) совпадает с плоскостью Oyz. **4.2.** $x=2$, $y=-3$, $z=1$. **4.3.** 1) $x-7y+5z+27=0$; 2) $2x+y-2z+20=0$. **4.4.** 1) $x=7$; 2) $y=2$; 3) $z=9$. **4.5.** 1) $5y+6z-11=0$; 2) $2x+z-3=0$; 3) $x-y-2=0$. **4.6.** 1) $y+8z=0$; 2) $3x+z=0$; 3) $7x-3y=0$.

4.7. $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$. **4.8.** $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}=0$.

4.9. 1) $x+2y+4z-7=0$. **4.10.** 1) $3x-y-3z-8=0$. **4.11.** 1) $a=4$, $b=-3$, $c=6$; 2) $a=-20$, $b=-4$, $c=5$. **4.12.** $x+y+z-3=0$. **4.13.** 32 куб. ед. **4.14.** $3x-8y+4z-24=0$. **4.15.** Да. **4.16.** 1) Нет; 2) да. **4.17.** Плоскости 1) и 2) параллельны; плоскости 1) и 3) совпадают; плоскость 4) перпендикулярна плоскостям 1), 2) и 3). **4.18.** 1) $\varphi=0$; 2) $\varphi=90°$; 3) $\varphi=45°$; 4) $\varphi=67°42'$; 5) $\varphi=80°01'$; 6) $\varphi=28°42'$. **4.19.** $7x+3y-8z+18=0$. **4.20.** $x+2y+4z-12=0$. **4.22.** $x+y+z-6=0$, $2x-2y+3z-11=0$; $3x+4y-5z+5=0$; $d=3$. **4.23.** $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ A & B & C \end{vmatrix}=0$.

4.24. $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ A & B & C \end{vmatrix}=0$. **4.26.** $x+20y+7z=0$, $x-z=0$. **4.27.** 1) $d_1=5/3$, $d_2=10$; 2) $d_1=d_2=2/7$; 3) $d_1=4$, $d_2=2$. **4.28.** $\cos\alpha=2/15$, $\cos\beta=2/3$, $\cos\gamma=-11/15$, $p=4$. **4.29.** 5. **4.30.** 1) 3; 2) 4; 3) 11/2; 4) 5. **4.31.** $M(9, 0, 0)$, $N(-5, 0, 0)$. **4.32.** $M(0, 37/67, 0)$, $N(0, 12/17, 0)$. **4.33.** $N(0, 0, 8)$. **4.34.** $2x-2y-z-27=0$, $2x-2y-z+15=0$. **4.35.** $x+2y-2z+7=0$, $x+2y-2z-35=0$. **4.36.** 1) $x+5y-4z+5=0$, $3x+y+2z-3=0$. **4.37.** $6x+y-5z-2=0$. **4.38.** $7x+y+1=0$. **4.39.** 1) $x=1+4t$, $y=-2+5t$, $z=3-7t$; 2) $x=1+t$, $y=-2$, $z=3$. **4.40.** 1) $x=9+2t$, $y=-8+3t$, $z=-5+4t$; 2) $x=9+t$, $y=-8$, $z=-5$; 3) $x=9$, $y=-8+t$, $z=-5$; 4) $x=9$, $y=-8$, $z=-5+t$. **4.41.** 1) $\frac{x-4}{3}=\frac{y-6}{-1}=\frac{z+7}{5}$.

4.42. 1) $\frac{x+1}{3}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+9}{5}$. **4.44.** 1) $\frac{x-10}{1}=\frac{y+12}{-3}\neq\frac{z-15}{8}$; 2) $\frac{x-10}{4}=\frac{y+12}{-2}=\frac{z-15}{7}$. **4.45.** $x=2+\sqrt{2}t$, $y=-3+t$, $z=4+t$.

4.46. $x=4-t$, $y=-5+7t$, $z=7-8t$ (AB). **4.47.** Медиана BB': $x=2+3t$, $y=5-11t$, $z=-7+9t$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$. **4.48.** AC: $x=9-16t$, $y=-3-2t$, $z=2+4t$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$. **4.49.** $x=3-t$, $y=-4-3t$, $z=-3+8t$. **4.50.** $x=3+6t$, $y=2-t$, $z=-7t$. **4.51.** 1) $\cos\alpha=2/3$, $\cos\beta=-2/3$, $\cos\gamma=1/3$; 2) $\cos\alpha=6/7$, $\cos\beta=2/7$, $\cos\gamma=-3/7$. **4.52.** 1) $\cos\varphi=0$; 2) $\cos\varphi=\sqrt{2}/2$; 3) $\cos\varphi=1$; 4) $\cos\varphi=8/9$. **4.53.** $x=1+t$, $y=3-t$, $z=-4+2t$. **4.54.** 1) $\sqrt{74}/3$; 2) $\sqrt{458}/7$. **4.55.** 1) $\sqrt{26/7}$; 2) $\sqrt{635/7}$. **4.56.** 1) 31/13; 2) $18/\sqrt{110}$. **4.57.** $\frac{x-4}{-1}=\frac{y-7}{2}=\frac{z+5}{1}$. **4.58.** $a/\sqrt{6}$. **4.60.** $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\mathbf{a}_1\mathbf{a}=0$, $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_2)\mathbf{a}_2\mathbf{a}=0$, где $\mathbf{a}=[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]$. **4.61.** 1) $x=1-5t$, $y=1-2t$, $z=7t$; 2) $x=t$, $y=t$, $z=-3+2t$. **4.62.** 1) $\frac{x-1}{5}=\frac{y-1}{13}=\frac{z-1}{11}$; 2) $\frac{x-1}{7}=\frac{y}{-8}=\frac{z-1}{5}$. **4.63.** $\frac{x-4}{-3}=\frac{y-3}{20}=\frac{z+6}{1}$. **4.64.** $x=5+t$, $y=-2+4t$, $z=7-3t$. **4.65.** $19x+20y-15z-63=0$. **4.66.** $17x-13y-16z-4=0$. **4.67.** $x=1-137t$, $y=1+217t$, $z=-73t$. **4.68.** $x-y+2z=0$. **4.69.** $5x+30y+29z-57=0$. **4.70.** $4x+3y-3=0$. **4.72.** $N(2, 2, 1)$; $11x+13y-12z-36=0$. **4.75.** Скрещиваются. **4.76.** Пересекаются в точке $N(1, 1, 1)$. **4.77.** Параллельны. **4.78.** Совпадают. **4.79.** Пересекаются в точке $N(1, 1, 1)$. **4.80.** Совпадают. **4.81.** Параллельны. **4.82.** Скрещиваются. **4.83.** 1) 45°; 2) 30°; 3) 30°; 4) 28°7′. **4.86.** $N(4, 8, -5)$. **4.87.** $N(10, 10, -1)$. **4.88.** 1) Параллельны; 2) прямая лежит в плоскости; 3) пересекаются в точке $N(1, 1, 1)$; 4) прямая лежит в плоскости. **4.89.** $N(-3; -3{,}2; 3{,}6)$. **4.90.** $N(2, -1, 2)$. **4.91.** $N(-4, 1, -2)$. **4.92.** $N(8, 14, -1)$. **4.93.** $N(-4, -7, 7)$.

5

5.1. $x^2+z^2=f_1^2(y)+f_2^2(y)$. **5.2.** $y^2+z^2=\varphi_1^2(x)+\varphi_2^2(x)$. **5.3.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. **5.4.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$. **5.5.** $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{p}=2z$. **5.6.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$. **5.7.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1$. **5.8.** $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1$. **5.9.** $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=-1$. **5.10.** $\frac{x^2}{p}+\frac{z^2}{p}=2y$. **5.11.** $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=0$. **5.12.** $x^2+z^2=a^2$. **5.13.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$. **5.14.** $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$. **5.15.** $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{b^2}=-1$. **5.16.** $\frac{y^2}{q}+\frac{z^2}{g}=2x$. **5.17.** $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{b^2}=0$. **5.18.** $y^2+z^2=b^2$. **5.19.** $y^2+z^2=\sin^2 x$. **5.20.** $y^2+z^2=\cos^2 x$. **5.21.** $8x^2+5y^2+5z^2-4xy+8yz+4xz+16x+14y+22z-39=0$. **5.22.** $x^2+y^2+7z^2-16xy-8xz-8yz+62x+44y-32z-11=0$. **5.23.** $9x^2+16y^2+9z^2-30xz+96z-144=0$. **5.24.** $x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz=3/2$. **5.25.** 2) $(x-4)^2+(y+5)^2+(z+8)^2=36$; 3) $(x-3)^2+(y+6)^2+(z-6)^2=81$. **5.26.** 1) $(x-2)^2+(y+7)^2+(z+3)^2=34$; 3) $(x-8)^2+(y+3)^2+(z-4)^2=50$. **5.27.** $(x-4)^2+(y+5)^2+(z-1)^2=49$. **5.28.** 1) Сфера радиусом $R=5$ с центром в точке $C(1, -2, 3)$; 3) одна точка $C(3, -1, 2)$. **5.29.** 1) Точка P лежит внутри сферы, точки Q и R — вне сферы, точка S — на сфере. **5.30.** 1), 2) прямая пересекает сферу в двух точках; 3) прямая касается сферы; 4) прямая и сфера не пересекаются.

5.31. $\left.\begin{matrix}12x+15y-20z-60=0, & 3x+5z=0,\\ 12x-15y+20z-60=0; & y+4=0.\end{matrix}\right\}$ **5.33.** $\cos\varphi=0$. **5.34.** $\cos\varphi=9/(5\sqrt{13})$. **5.35.** Сфера $X^2+Y^2+Z^2=115/12$; $O(1, -3/2, 2)$. **5.36.** $X^2+Y^2+Z^2=15/2$. **5.37.** Эллипсоид $\frac{X^2}{8}+\frac{Y^2}{6}+\frac{Z^2}{4}=1$; $O(1, -2, 3)$. **5.38.** Однополостный гиперболоид $\frac{X^2}{3}+\frac{Y^2}{2}-\frac{Z^2}{1}=1$; $O(2, 1, -1)$. **5.39.** $\frac{X^2}{9}+\frac{Y^2}{4}+\frac{Z^2}{1}=1$; $O(-1, -2, 1)$. **5.40.** Двуполостный гиперболоид $\frac{X^2}{4}+\frac{Y^2}{2}-\frac{Z^2}{1}=-1$; $O(3, -1, 4)$. **5.41.** $\frac{X^2}{4}+\frac{Y^2}{2}+\frac{Z^2}{2}=-1$. **5.42.** $\frac{Y^2}{4}-\frac{X^2}{8}+\frac{Z^2}{2}=1$; $O(1, 1, 1)$. **5.43.** $\frac{X^2}{6}-\frac{Y^2}{3}+\frac{Z^2}{2}=1$; $O(2, 1, 1)$. **5.44.** $X^2-4Y^2+Z^2=-1$; $O(1, 3/2, 2)$. **5.45.** $\frac{X^2}{6}-\frac{Y^2}{12}-\frac{Z^2}{12}=1$; $O(-4, 1, 2)$. **5.46.** Эллиптический параболоид $\frac{X^2}{4}+\frac{Y^2}{3}=2Z$; $O(2, -1, 5)$. **5.47.** Конус $\frac{X^2}{1}+\frac{Y^2}{2}-\frac{Z^2}{3}=0$; $O(-2, 1, -1)$. **5.48.** Гиперболический параболоид $\frac{X^2}{3}-\frac{Y^2}{2}=2Z$; $O(-3, 2, -4)$. **5.49.** $\frac{X^2}{4}+\frac{Y^2}{2}+\frac{Z^2}{1}=0$; $O(2-1, 1)$. **5.50.** $\frac{X^2}{4}+\frac{Y^2}{2}=-2Z$; $O(-3, 9/2, 1/16)$. **5.51.** $X^2+2Y^2-4Z^2=1$; $O(-1, 1, -3)$. **5.52.** $\frac{X^2}{4}-\frac{Y^2}{3}+\frac{Z^2}{2}=0$; $O(3, -1, -1)$. **5.53.** $\frac{X^2}{4}-\frac{Y^2}{8/3}-\frac{Z^2}{2}=1$; $O(1, -2, -1)$. **5.54.** $\frac{X^2}{3}+\frac{Y^2}{2}=2Z$; $O(-4, 3, -1)$. **5.55.** $\frac{X^2}{4}-\frac{Y^2}{2}=2Z$; $O(-3, 1, 5)$. **5.56.** Эллиптический

цилиндр $\frac{X^2}{9}+\frac{Y^2}{4}=1$; $X=x-4$, $Y=y+2$. **5.57.** Гиперболический цилиндр $\frac{X^2}{6}-\frac{Y^2}{4}=1$; $X=x-3$, $Y=y+1$. **5.58.** $3X^2+2Z^2=-4Y$; $O(-1, 3, 2)$. **5.59.** $-4X^2+3Y^2+2Z^2=3$; $O(3/2, 1, -2)$. **5.60.** $4X^2+9Z^2=36$; $X=x-1$, $Z=z+1$. **5.61.** $X^2+2Y^2=-4$; $X=x+2$, $Y=y-1$. **5.62.** $9X^2-4Y^2=-36$; $X=x+1$, $Y=y+2$. **5.63.** $\frac{Z^2}{4}-\frac{Y^2}{2}=2X$; $O(3, -1, 1)$. **5.64.** $\frac{Y^2}{2}+\frac{Z^2}{4}=2X$; $O(-2, 1, -1)$. **5.65.** Параболический цилиндр $X^2=6Y$; $X=x+2$, $Y=y-3$. **5.66.** $Y^2=4X$; $Y=y+3$, $X=x-2$. **5.67.** Пара параллельных плоскостей $X=-3$, $X=x-4$. **5.68.** Пара совпавших плоскостей $X=0$, $X=x+3$. **5.69.** $X^2=-1$, $X=x-2$. **5.70.** $\frac{X^2}{4}-\frac{Y^2}{3}-\frac{Z^2}{2}=0$; $O(3, -1, -1)$. **5.71.** $\frac{Y^2}{4}-\frac{Z^2}{2}=1$; $Y=y+1$, $Z=z-1$. **5.72.** $Z^2=-4Y$; $Y=y-4$, $Z=z+3$. **5.73.** $2Y^2+Z^2=4$; $Y=y-1$, $Z=z+1$. **5.74.** $X^2=3Z$; $X=x+2$, $Z=z-3$.

6

6.1. Вся числовая прямая, т. е. $(-\infty, +\infty)$. **6.2.** $(-\infty, +\infty)$. **6.3.** $[-4, -1]$, $[1, 4]$. **6.4.** $[-2, 2]$. **6.5.** $x>2$. **6.6.** $(-\infty, 3)$, $(3, +\infty)$. **6.7.** $(-\infty, -4)$, $(-4, 4)$, $(4, +\infty)$. **6.8.** Множество точек $x=(2k+1)\pi/2$ $(k=0, \pm1, \pm2, \ldots)$. **6.9.** $(-\infty, -3)$, $(-3, 2)$, $(2, +\infty)$. **6.10.** $(-\infty, 1)$, $(1, 5)$, $(5, +\infty)$. **6.11.** $(-\infty, +\infty)$ при $b^2-4ac<0$; вся числовая прямая, кроме точек $x=(-b\pm\sqrt{b^2-4ac})/2a$, при $b^2-4ac>0$; вся числовая прямая, кроме точки $x=-b/2a$, при $b^2-4ac=0$. **6.12.** Множество отрезков $[2\pi k-\pi/2, 2\pi k+\pi/2]$. **6.13.** Множество интервалов $(2\pi k-\pi/2, 2\pi k+\pi/2)$. **6.14.** Множество отрезков $[2k\pi, (2k+1)\pi]$. **6.15.** $[-0{,}5; 1]$. **6.16.** $[1/2, 9/2]$. **6.18.** 1) Четная; 2)—4) — нечетная; 5) четная; 6) не принадлежит ни к четным, ни к нечетным функциям. **6.25.** $f(10)=4$, $f(20)=8$, $f(300)=62$.

7

7.1. $a_1=0$, $a_2=1/2$, $a_3=2/3$, $a_4=3/4$, $a_5=4/5$. **7.2.** 0, 3/2, 2/3, 5/4, 4/5. **7.3.** 1/3, 1/15, 1/35, 1/63, 1/99. **7.4.** 1, 1/9, 1/45, 1/189, 1/729. **7.5.** 4, 2, 16, 8, 64. **7.6.** 1/4, 1/2, 1/16, 1/8, 1/64. **7.7.** $a_n=(1+(-1)^{n+1})/2$. **7.8.** $n+1/4$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$. **7.9.** Ограничена сверху и снизу. **7.10.** Ограничена сверху и снизу. **7.11.** Ограничена снизу. **7.13.** Ограничена сверху и снизу. **7.14.** Ограничена сверху и снизу. **7.15.** Убывающая. **7.16.** Немонотонная. **7.17.** Возрастающая. **7.18.** Возрастающая. **7.19.** Возрастающая. **7.20.** Убывающая. **7.21.** Немонотонная. **7.22.** Убывающая. **7.23.** 1) Да (например, $x_n=n$, $y_n=-n$); 2) нет; 3) да $(x_n=n$, $y_n=1/n)$; 4) да $(x_n=n$, $y_n=n^2$, $x_n/y_n=1/n)$. **7.24.** 1), 2) Да. **7.25.** 1), 2) Да. **7.26.** 1), 2) Да. **7.27.** 1)—3) 0. **7.28.** 0. **7.29.** 1) $+\infty$; 2) $-\infty$; 3) нет предела. **7.30.** 1) 1; 2) 1/2; 3) 4. **7.31.** $N_1=10$, $N_2=100$, $N_3=100$, $N=E[1/\varepsilon]$ — целая часть числа $1/\varepsilon$. **7.32.** $N_1=10$, $N_2=100$, $N=E[1/\sqrt{\varepsilon}]$. **7.33.** 1) 9; 2) 7; 3) 2; 4) 71. **7.34.** 1) 4; 2) 25; 3) 32. **7.39.** 1/2. **7.40.** 2/3. **7.41.** 0. **7.42.** 1,5. **7.43.** 0. **7.44.** $+\infty$. **7.45.** 3/4. **7.46.** 3. **7.47.** 2/3. **7.48.** 0. **7.49.** 0. **7.50.** 0,5. **7.51.** 0,5. **7.52.** 1/3. **7.53.** 2. **7.54.** 1. **7.55.** a_0/b_0. **7.56.** 0,5. **7.57.** 0. **7.58.** ∞. **7.59.** 1. (*Указание.* Рассмотреть две последовательности $b_n=n/\sqrt{n^2+n}$, $c_n=n/\sqrt{n^2+1}$ $(b_n<a_n<c_n)$; найти их пределы.) **7.60.** 7. **7.61.** 3. **7.62.** $-0{,}8$. **7.63.** 4. **7.64.** $-2/3$. **7.65.** 1. **7.66.** 3/2. **7.67.** 4/5. **7.68.** ∞. **7.69.** 16/27. **7.70.** 2. **7.71.** 1/4. **7.72.** 0. **7.73.** ∞. **7.74.** 3. **7.75.** -2. **7.76.** 1. **7.77.** -2. **7.78.** 7. **7.79.** 5. **7.80.** -72. **7.81.** -28. **7.82.** 12. **7.83.** 96. **7.84.** n. **7.85.** n/m. **7.86.** na^{n-1}. **7.87.** na^{n-m}/m. **7.88.** 4/5. (*Указание.* Положить $x=t^{20}$.) **7.89.** 4/3. **7.90.** e^3. **7.91.** e^{-2}. **7.92.** e^2. **7.93.** e^{-3}. **7.94.** 1/4. **7.95.** 8. **7.96.** 1. **7.97.** a/b. **7.98.** 1/16.

7.99. 8. **7.100.** —10. **7.101.** 1/12. **7.102.** —1/27. **7.103.** —0,5. **7.104.** 0,04. **7.105.** 1/9. **7.106.** 0. **7.107.** ∞. **7.108.** e^{-1}. **7.109.** e^2. **7.110.** e^6. **7.111.** e^{-8}. **7.112.** e^4. **7.113.** e^{-2}. **7.114.** $5\log_2 e$. **7.115.** $(-1/3)\ln 3$. **7.116.** $3\ln 2$. **7.117.** $4/\ln 3$. **7.118.** 4/3. **7.119.** —6. **7.120.** 7. **7.121.** —4/3. **7.122.** —3/2. **7.123.** 2/3. **7.128.** 1/4. **7.129.** 1/5. **7.132.** 5. **7.133.** ∞. **7.134.** —3. **7.135.** ∞. **7.136.** —0,5. **7.137.** 5/4. **7.138.** 0,1. **7.139.** —1/12. **7.140.** 0,25. **7.141.** 5. **7.142.** $6/\pi$. (*Указание.* Положить $3 - x = \alpha$.) **7.143.** 1. **7.144.** 0,5. **7.145.** $-2/\pi$. **7.146.** 2. **7.147.** 2/3. **7.148.** 0. **7.149.** 0. **7.150.** 0. **7.151.** e. **7.152.** m/n. **7.153.** m/n. **7.154.** e^{-1}. **7.155.** —0,5. **7.156.** 0,5. **7.157.** 1,5. **7.158.** $\alpha n/m$. **7.159.** $-k\alpha/n$. **7.162.** 1. **7.163.** 1/3. **7.165.** 27. **7.167.** 1/4. **7.170.** —1,5. **7.171.** —1/12. **7.182.** $\alpha(x)$ и x — величины одного порядка. **7.183.** $\alpha(x) \sim x$. **7.184.** $\alpha(x)$ — бесконечно малая высшего порядка. **7.185.** $\alpha(x)$ — бесконечно малая низшего порядка. **7.186.** Величины одного порядка. **7.187.** Несравнимы (не существует предела отношения данных величин). **7.198.** 1,5. **7.199.** 4. **7.200.** 8. **7.201.** 0,2. **7.202.** 1/7. **7.203.** 2/3. **7.204.** 2/15. **7.205.** 1. **7.206.** 8. **7.207.** 0,5. **7.208.** 1. **7.209.** 1/3. **7.210.** 2. **7.211.** 0,5. **7.212.** 0,2. **7.213.** 7. **7.214.** —10/9. **7.215.** 2. **7.216.** 1. **7.217.** 6. **7.218.** 1. **7.219.** 0,5. **7.220.** 0,5.

8

8.9. $x \neq \pi/2 + k\pi$ (k — целое число). **8.10.** $x \neq k\pi$ ($k \in Z$). **8.11.** 1,5. **8.12.** 0,8. **8.13.** 1. **8.14.** a. **8.15.** $\ln a$. **8.16.** 1. **8.17.** 0,25. **8.18.** 1. **8.19.** 2/3. **8.20.** —2. **8.31.** $x = -3$ — точка разрыва второго рода. **8.32.** $x = 0$. **8.33.** $x = -3$, $x = 3$. **8.34.** $x = 1$, $x = 2$. **8.35.** $x = -3$, $x = 3$. **8.36.** $x = -1$. **8.37.** $x = -3$ — точка разрыва первого рода. **8.38.** $x = 0$ — точка устранимого разрыва. **8.39.** $x = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). **8.40.** $x = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). **8.41.** $x = 0$. **8.42.** $x = 0$. **8.43.** $x = -2$, скачок $\Delta = 2$. **8.44.** $x = 1$, $\Delta = 2$. **8.45.** $x = 2$, $\Delta = \pi$. **8.46.** $x = 0$, $\Delta = 2\sqrt{2}$. **8.47.** $x = 2$, $\Delta = 1$. **8.48.** $x = 1$, $\Delta = 4$. **8.49.** $x = 0$, $\Delta = 1$. **8.50.** $x = 1$, $\Delta = 1$. **8.51.** $x = 0$, $\Delta = \infty$. **8.60.** *Указание.* Если $x = \operatorname{sh} y$, то по определению $y = \operatorname{Arcsh} x$. Поскольку $\operatorname{sh} y = (e^y - e^{-y})/2$, то, обозначив $e^y = u$, получим $x = (u - (1/u))/2$, $2x = u - (1/u)$, $u^2 - 2ux - 1 = 0$, откуда $u = e^y = x \pm \sqrt{x^2+1}$. Так как $e^y > 0$, то знак «—» можно отбросить, т. е. $e^y = x + \sqrt{x^2+1}$. Следовательно, $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

9

9.1. $5x^4 - 16x^3 + 6x^2 - 6x + 7$. **9.2.** $x(x^2-1)^2$. **9.9.** $4/\sin^2 2x$. **9.10.** $\operatorname{tg}^2 x$. **9.12.** $(1-x^2)\sin x + 3x\cos x$. **9.13.** $x^2 \sin x$. **9.14.** $-x^2 \operatorname{ch} x$. **9.17.** $10x/(x^2+4)^2$. **9.19.** $-(x^2+4x+1)/(x^2+x+1)^2$. **9.23.** $x(x^3+3x+2)/(x^2+1)^2$. **9.25.** $(1-x^2)\operatorname{sh} x - x\operatorname{ch} x$. **9.27.** $(x\operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x - 1)/(x + \operatorname{sh} x)^2$. **9.31.** $-(x^2+2)/(\sin x + x\cos x)^2$. **9.32.** $-x^2/(\operatorname{ch} x - x\operatorname{sh} x)^2$. **9.33.** $f'(-1) = 16$, $f'(0) = 3$, $f'(1) = -4$. **9.34.** $r'(\pi/4) = -1$. **9.35.** $s'(0) = 5$, $s'(-2) = -11$. **9.36.** $x'(0) = 1$, $x'(\pi/2) = 1$. **9.37.** $7\cos 7x$. **9.38.** $5\sin(3-5x)$. **9.41.** $2\sin 4x$. **9.42.** $3x^2\cos x^3$. **9.44.** $-12x/(3+2x^2)^4$. **9.47.** $\operatorname{sh} 2x$. **9.49.** $-2\operatorname{sh} 2x$. **9.51.** $3/\operatorname{ch}^4 x$. **9.53.** $(x+2)/\sqrt{x^2+4x+2}$. **9.55.** $(x - 2\sin 4x)/\sqrt{x^2+\cos 4x}$. **9.60.** $2(x-1)\sin(2x^2-4x+6)$. **9.62.** $1/(x\ln 10)$. **9.64.** $2xe^{x^2}$. **9.68.** $\operatorname{ctg} x$. **9.71.** $-3\sin 3x\, e^{\cos 3x}$. **9.73.** $2/(1-x^2)$. **9.75.** $1/(x^2-81)$. **9.77.** $1/(x^2+4x-8)$. **9.79.** $1/(4x^2+8x-3)$. **9.81.** $1/(x^2-x-2)$. **9.83.** $1/\sqrt{x^2-4x-5}$. **9.91.** $1/\sqrt{64-x^2}$. **9.93.** $2(x^2+4)$. **9.97.** $1/\sqrt{9x-4x^2}$. **9.99.** $1/(x^2+64)$. **9.101.** $1/(x^2+12x+50)$. **9.105.** $(x+3)/(x^2+2x+5)$. **9.109.** $1/(1+x^4)$. **9.110.** $1/(1+x^6)$. **9.111.** $-(2x+5y)/(5x+2y)$. **9.113.** $-\sqrt[3]{y/x}$. **9.115.** $(2-3x-2y)/(2(x-2))$. **9.119.** $-y/(x+2y+\cos y)$. **9.121.** 0,5. **9.122.** —2,8. **9.124.** —8/9. **9.126.** $-\operatorname{tg} t$. **9.128.** $b\operatorname{th} t/a$. **9.130.** $-\operatorname{ctg} t$. **9.135.** $(\sin x)^{\cos x}(-\sin x\ln\sin x + \cos x\operatorname{ctg} x)$. **9.139.** $x^{\cos x}(-\sin x\ln x + \cos x/x)$. **9.145.** $u^v(v'\ln u + vu'/u)$. **9.147.** $6(x+2)$. **9.149.** $2\cos x/\sin^3 x$. **9.153.** $4/(x-1)^3$. **9.157.** $3/(4\sqrt{(x+2)^5})$. **9.159.** $-16x/(x^2-16)^2$. **9.163.** $-\cos t/(a\sin^3 t)$. **9.165.** $(t^2+1)/(2at)$. **9.168.** 18. **9.169.** $-8\cos 2x$. **9.171.** $24x - 30$. **9.172.** 24. **9.174.** $-32\sin 2x$. **9.176.** $-p^2/y^3$. **9.180.** $-(x^2+y^2)/y^3$. **9.182.** 4. **9.183.** 1,5. **9.184.** 25/64. **9.186.** $(2x+5)dx$. **9.188.** $10dx/(x^2-25)$.

9.191. $-5\sin 5x dx$. **9.195.** $12\operatorname{sh}^3 3x\operatorname{ch} 3x dx$. **9.198.** $dx/(x^3+1)$. **9.200.** 0,4. **9.201.** —0,02. **9.202.** $-0{,}02e$. **9.203.** 0,001. **9.204.** —2/15. **9.205.** 0,026. **9.206.** 4,2. **9.207.** 0,333. **9.208.** 0,96. **9.210.** 0,8. **9.211.** 0,485. **9.212.** 1,012. **9.213.** 0,423. **9.214.** 8,944. **9.215.** 4,021.

10

10.1. —1/6. **10.2.** 1/4. **10.3.** —1. **10.4.** 13. **10.5.** 4/3. **10.6.** 3. **10.7.** 1/81. **10.8.** 2/3. **10.9.** 7. **10.10.** 0. **10.11.** 1. **10.12.** 0. **10.13.** 1/3. **10.14.** —1/6. **10.15.** 0. **10.16.** 4. **10.17.** e^{-1}. **10.18.** 1. **10.19.** $e^{-1/8}$. **10.20.** $e^{2/\pi}$. **10.21.** 1,5. **10.22.** 2. **10.23.** 2. **10.24.** 4. **10.25.** $2/\pi$. **10.29.** 1. **10.30.** 0,5. **10.32.** —1,5. **10.33.** 8/3. **10.34.** 1/6. **10.36.** 1/7. **10.37.** 1.
10.38. 0,5. **10.41.** $12x - y - 42 = 0$ (касательная), $x + 12y - 76 = 0$ (нормаль).
10.42. $7x + y - 32 = 0$ (касательная), $x - 7y - 26 = 0$ (нормаль). **10.44.** $9x - y -$
$-13 = 0$, $x + 9y + 35 = 0$. **10.46.** $4x - y - 6 = 0$, $x + 4y - 10 = 0$. **10.48.** $5x +$
$+ y - 1 = 0$, $x - 5y + 5 = 0$. **10.50.** $2x - y + 5 = 0$, $x + 2y = 0$. **10.52.** $x = 0$,
$y + 4 = 0$. **10.54.** $5x - y - 4 = 0$, $x + 5y - 6 = 0$. **10.56:** $8x + 9y - 25 = 0$,
$9x - 8y - 10 = 0$. **10.58.** $x + y - 1 = 0$, $x - y - 3 = 0$. **10.61.** $\varphi_1 = \operatorname{arctg}(2/3)$,
$\varphi_2 = \operatorname{arctg} 1{,}1$. **10.62.** $\varphi_1 = \operatorname{arctg}(1/2)$, $\varphi_2 = \operatorname{arctg}(1/3)$. **10.63.** $\varphi_1 = \varphi_2 = \operatorname{arctg} 1{,}5$.
10.64. $\varphi_1 = \varphi_2 = \pi/2$. **10.68.** $\varphi_1 = \varphi_2 = \operatorname{arctg} 7$. **10.69.** $2/(17\sqrt{17})$. **10.70.** $\sqrt{2}/2$.
10.72. $\sqrt{2}/50$. **10.74.** 12. **10.77.** $M(3, -3)$, $N(1/3, -41/27)$. **10.78.** $M(-2, -1)$,
$N(2, -29)$. **10.79.** $M(0, 7)$, $N(1, 7)$. **10.82.** Возрастает в интервалах $(-\infty, -8/3)$,
$(0, +\infty)$; убывает в интервале $(-8/3, 0)$. **10.84.** Возрастает в интервалах
$(-\infty, -3)$, $(-1, +\infty)$; убывает в интервале $(-3, -1)$. **10.86.** Убывает в интер-
валах $(-\infty, -\sqrt{2})$, $(0, \sqrt{2})$; возрастает в интервалах $(-\sqrt{2}, 0)$, $(\sqrt{2}, +\infty)$.
10.92. $\max f(x) = f(-1) = 7$, $\min f(x) = f(1) = 3$. **10.93.** $\min f(x) = f(0) = -4$,
$\max f(x) = f(-2) = 0$. **10.95.** $\min f(x) = f(1) = -5$; $\max f(x) = f(1/3) = -131/27$.
10.96. $\max f(x) = f(0) = 15$, $\min f(x) = f(\pm\sqrt{5}) = -10$. **10.98.** $\min f(x) = f(3) = -23$,
$\max f(x) = f(1) = 5$. **10.100.** $\min f(x) = f(0) = 1$. **10.101.** Экстремумов нет. **10.102.** 9;
—19. **10.103.** 14; —6. **10.104.** 7; —53. **10.105.** 95; —49. **10.106.** 0; —20. **10.107.** 21;
—11. **10.109.** 0,25; —1. **10.110.** 24; —81/8. **10.116.** $M(0, 7)$. **10.117.** $M(1, -3)$.
10.118. $M(2, -7)$. **10.119.** $M(-2, 38)$. **10.120.** $M(-1, -19)$, $N(1, -9)$.
10.121. $M(-\sqrt{2}, -10)$, $N(\sqrt{2}, -10)$. **10.125.** $M(1/\sqrt{3}, 3/4)$, $N(-1/\sqrt{3}, 3/4)$.
10.126. $x = -1$, $x = 1$. **10.127.** $x = 0$, $x = -1$, $x = 1$. **10.128.** $x = 0$, $y = -x + 2$.
10.129. $x = 0$, $y = x + 2$. **10.130.** $y = -x$, $y = x$. **10.131.** $x = 1$, $y = 1$. **10.132.** $x = \pm a$,
$y = \pm b$. **10.133.** $y = \pm a$. **10.134.** $x = -3$, $y = 0$. **10.135.** $x = 0$, $y = -11$.
10.137. $x = 0$, $x + y \pm 2 = 0$. **10.144.** Функция определена при всех x; $\max f(x) = f(-1) = 4$, $\min f(x) = f(1) = 0$; $M(0, 2)$ — точка пересечения с осью Oy, $L(-2, 0)$ — точка пересечения с осью Ox, в точке $N(1, 0)$ кривая касается оси Ox.
10.145. Функция определена при всех x; $\max f(x) = f(-2) = 5$, $\min f(x) = f(0) = 1$.
10.146. $\max f(x) = f(1/3) = -14/27$, $\min f(x) = f(3) = -10$. **10.147.** $\max f(x) =$
$= f(1/3) = -104/27$, $\min f(x) = f(1) = -4$. **10.148.** $\max f(x) = f(-2) = 17$, $\min f(x) =$
$= f(2) = -15$. **10.149.** $\max f(x) = f(-\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}+5$, $\min f(x) = f(\sqrt{2}) = -4\sqrt{2}+5$.
10.150. $\max f(x) = f(1) = 1$, $\min f(x) = f(3) = -3$. **10.151.** $\max f(x) = f(0) = 1$,
$\min f(x) = f(2) = -3$. **10.152.** $\max f(x) = f(0) = 1$, $\min f(x) = f(4/3) = -37/27$.
10.153. $\max f(x) = f(-3) = -8$, $\min f(x) = f(-1) = -12$. **10.154.** $\max f(x) =$
$= f(-8/3) = 94/27$, $\min f(x) = f(0) = -6$. **10.155.** $\max f(x) = f(-2) = 25/3$, $\min f(x) =$
$= f(2) = -7/3$. **10.156.** $\max f(x) = f(0) = 3$, $\min f(x) = f(-\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}) = -1$.
10.157. $\max f(x) = f(-\sqrt{10}/2) = f(\sqrt{10}/2) = 0{,}25$, $\min f(x) = f(0) = -6$.
10.158. $\max f(x) = f(0) = 9$, $\min f(x) = f(-\sqrt{5}) = f(\sqrt{5}) = -16$. **10.159.** $\max f(x) =$
$= f(-\sqrt{26}/2) = f(\sqrt{26}/2) = 25/4$, $\min f(x) = f(0) = -36$ (см. рис. 1).
10.160. $\max f(x) = f(-1) = 7$, $\min f(x) = f(1) = -1$. **10.161.** $\max f(x) = f(-3) = 27$,
$\min f(x) = f(-1) = -1$. **10.162.** $\max f(x) = f(-1) = 7{,}5$, $\min f(x) = f(0) = 2$,
$\min f(x) = f(-2) = f(2) = -6$. **10.163.** $\max f(x) = f(-1) = f(1) = -6$; $\min f(x) =$
$= f(0) = -10$, $\min f(x) = f(-\sqrt{3}) = f(\sqrt{3}) = -10$. **10.164.** Область определения:
$(-\infty, 1)$, $(1, 2)$, $(2, +\infty)$; $\max f(x) = f(1{,}5) = -4$; асимптоты: $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$.
10.165. $f(x) > 0$ для всех x; асимптота $y = 0$, $\max f(x) = f(-1) = 1/2$. **10.166.** Область определения: $(-\infty, 1)$, $(1, 3)$, $(3, +\infty)$; асимптоты: $x = 1$, $x = 3$, $y = 0$,

$\max f(x) = f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}/(6 - 4\sqrt{3})$, $\min f(x) = f(-\sqrt{3}) = -3/(6 + 4\sqrt{3})$. **10.167.** $\min f(x) = f(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2}/(4 + 2\sqrt{2})$, $\max f(x) = f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}/(4 - 2\sqrt{2})$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$; асимптота $y = 0$. **10.169.** Область определения: $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, +\infty)$; $\min f(x) = f(0) = -1$; асимптоты: $x = -1$, $x = 1$, $y = 1$. **10.170.** Область определения: $(-\infty, -1)$, $(-1, +\infty)$; $\max f(x) = f(-2) = -4$, $\min f(x) = f(0) = 0$; асимптоты: $x = -1$, $y = x - 1$. **10.171.** Область определения: $(-\infty, 1)$, $(1, +\infty)$;

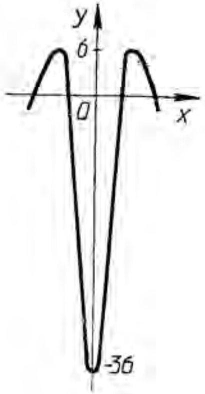


Рис. 1

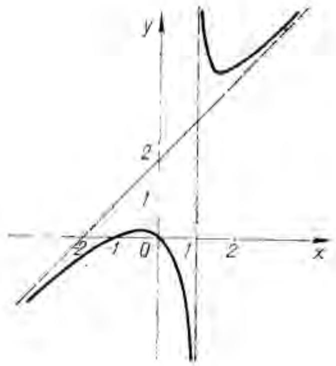


Рис. 2

асимптоты: $x = 1$, $y = x + 2$; $\max f(x) = f(1 - \sqrt{2}) = 3 - 2\sqrt{2}$, $\min f(x) = f(1 + \sqrt{2}) = 3 + 2\sqrt{2}$ (см. рис. 2). **10.172.** График представляет гиперболу, определяемую уравнением $y = (x - 1)/(x + 1)$, асимптоты которой $x = -1$, $y = 1$. **10.173.** Область определения: $(-\infty, 1)$, $(1, 5)$, $(5, +\infty)$; асимптоты: $x = 1$, $x = 5$, $y = 1$; $\max f(x) = f\left(\dfrac{9 + \sqrt{92}}{11}\right) \approx 3{,}2$; $\min f(x) = f\left(\dfrac{9 - \sqrt{92}}{11}\right) \approx -0{,}7$. **10.174.** Функция определена при $x \geqslant 0$; возрастает; экстремумов и асимптот нет. **10.175.** Функ-

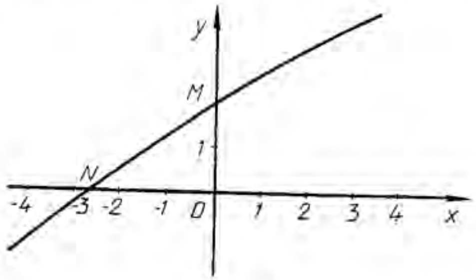


Рис. 3

ция определена в промежутке $(-\infty, 4)$; $\max f(x) = f(3{,}75) = 4{,}25$; график вогнут вниз, пересекает ось Oy в точке $M(0, 2)$, ось Ox — в точке $N(-(1 + \sqrt{17})/2, 0)$ (см. рис. 3). **10.176.** Область определения: $(-\infty, -1)$, $(-1, +\infty)$; асимптоты: $x = -1$, $y = x$, $\max f(x) = f(-\sqrt[3]{4}) = -\dfrac{4}{3}\sqrt[3]{4}$; $\min f(x) = f(0) = 0$ (см. рис. 4). **10.177.** Возрастает в промежутке $(-\infty, +\infty)$; экстремумов нет; асимптота

$y = x$; начало координат является точкой перегиба графика функции. **10.178.** Функция определена при всех x; $\max f(x) = f(-1/2) = 9/16$, $\min f(x) = f\left(\dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right) = -1$, $\min f(x) = f\left(\dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right) = -1$; график пересекает ось Ox в точках с абсциссами $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$ (см. рис. 5). **10.179.** График пересекает ось Ox в точках с абсциссами $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$; $\max f(x) =$

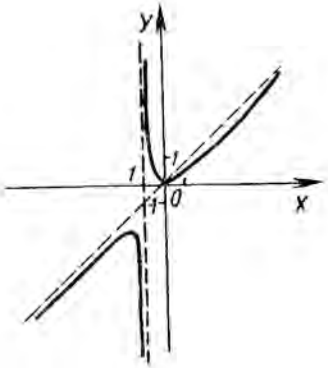


Рис. 4

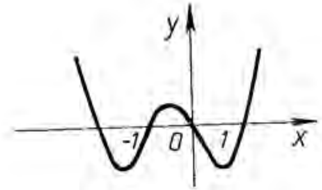


Рис. 5

$= f\left(\dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) = 1$, $\max f(x) = f\left(\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) = 1$, $\min f(x) = f(1/2) = -9/16$ (см. рис. 6). **10.180.** Возрастает в промежутке $(-\infty, +\infty)$; экстремумов нет; асимптота $y = x$; начало координат является точкой перегиба графика функции. **10.181.** Область определения: $(-\infty, 1)$, $(1, +\infty)$; асимптоты: $x = 1$, $y = x$;

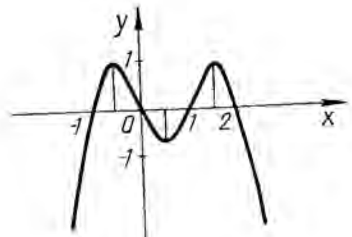


Рис. 6

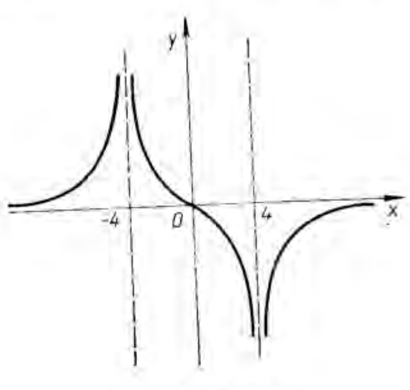


Рис. 7

$\max f(x) = f(0) = 0$, $\min f(x) = f(\sqrt[5]{6}) = \dfrac{6}{5}\sqrt[5]{6}$. **10.182.** Область определения: $(-\infty, -4)$, $(-4, 4)$, $(4, +\infty)$; экстремумов нет; асимптоты: $x = -4$, $x = 4$,

$y=0$ (см. рис. 7). **10.183.** Область определения: $(-\infty, -3)$, $(-3, 3)$, $(3, +\infty)$; экстремумов нет; асимптоты: $x=-3$, $x=3$, $y=0$. **10.224.** $S=60$. **10.225.** $b=2a$. **10.226.** $a/2$. **10.227.** $2\sqrt{b}$. **10.228.** Квадрат со стороной $\sqrt{S}$. **10.229.** Острые углы треугольника $\alpha=30°$, $\beta=60°$. **10.230.** 1,5. **10.231.** $\max V(r) = \frac{\pi H}{R}(R-r)r^2 = V\left(\frac{2}{3}R\right) = \frac{4}{27}\pi R^2 H$, где r — радиус цилиндра. **10.232.** $\pi R^2(1+\sqrt{5})$ поверхности шара. **10.233.** Объем конуса равен удвоенному объему шара. **10.234.** $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}R^3$. **10.235.** $\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$. **10.236.** 6,93 %. **10.237.** $x=\sqrt{a^2/2}$. **10.238.** $n/(n+1)$. **10.239.** kae^{-kt}.

11

11.1*. $2x^3-4x^2-4x+3\ln x+5/x$. **11.3.** $-1/x+1/x^3-1/x^5$. **11.5.** $2x\sqrt{x}/3-6\sqrt{x}$. **11.7.** $8x+8x\sqrt{x}+3x^2+2x^2\sqrt{x}/5$. **11.9.** $2^x/\ln 2+4\sqrt[4]{x}$. **11.11.** $x+\cos x$. **11.13.** $4\cos x-5\operatorname{ctg} x$. **11.15.** $3\operatorname{arctg} x-7\arcsin x$. **11.17.** $x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$. **11.19.** $x-\operatorname{arctg} x$. **11.20.** $x^3/3-x+\operatorname{arctg} x$. **11.22.** $-\frac{1}{5}\sin(4-5x)$. **11.24.** $-\frac{1}{3}\cos x^3$. **11.26.** $\sqrt{2x+13}$. **11.28.** $-\frac{1}{8}\ln|7-8x|$. **11.30.** $\frac{1}{24}\sqrt{(4x+9)^3}-\frac{9}{8}\sqrt{4x+9}$. **11.32.** $-\frac{1}{3(x+1)^3}+\frac{1}{2(x+1)^4}-\frac{1}{5(x+1)^5}$. **11.34.** $-\frac{2}{9}(1+3\cos x)^{3/2}$. **11.36.** $-\cos^6 x/6$. **11.38.** $\frac{2}{9}(x^3-7)^{3/2}$. **11.40.** $-\frac{1}{4\sin^4 x}$. **11.42.** $-\frac{1}{\sin x}-2\sin x+\frac{1}{3}\sin^3 x$. **11.44.** $(\arcsin x)^2/2$. **11.46.** $\frac{3}{8}\arcsin x+\frac{x}{6}\sqrt{1-x^2}\left(x^4-\frac{7}{2}x^2+\frac{31}{4}\right)$. **11.48.** $\frac{81\sqrt{3}}{8}\arcsin\frac{x}{3}-\frac{\sqrt{3}}{8}x\sqrt{1-x^2}(9-2x^2)$. **11.58.** $-\frac{2}{3}\sqrt{1-x^3}$. **11.60.** $-\frac{\sqrt{5}}{3}(25-x^2)^{3/2}$. **11.65.** $-\frac{1}{5}x\cos 5x+\frac{1}{25}\sin 5x$. **11.67.** $(x+6)e^x$. **11.69.** $\frac{x^2}{4}\times(2\ln 6x-1)$. **11.71.** $\frac{1}{8}\left[\left(4x^2+\frac{1}{4}\right)\operatorname{arctg} 4x-x\right]$. **11.73.** $-\frac{1}{3}e^{-x^3}(x^3+1)$. **11.75.** $2(x-1)\sin x-(x-1)^2\cos x$. **11.76.** $(x^2+4x-3)\sin x+(2x+4)\cos x$. **11.78.** $2x\sin x-(x^2-2)\cos x$. **11.80.** $(3x^2-6)\cos x+(x^3-6x)\sin x$. **11.82.** $2((3x-6)\cos\sqrt{x}+(x-6)\sqrt{x}\sin\sqrt{x})$. **11.84.** $(\sin x^2-x^2\cos x^2)/2$. **11.86.** $\frac{\cos 2x}{8}+\frac{x\sin 2x}{4}+\frac{x^2}{4}$. **11.88.** $x\arccos\sqrt{x/(x+1)}+\sqrt{x}-\operatorname{arctg}\sqrt{x}$. **11.91.** $\frac{1}{2}x^2\times\operatorname{arcctg}\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}$. **11.93.** $e^x\sin^2\frac{x}{2}+\frac{e^x}{4}(\cos x-\sin x)$. **11.94.** $\frac{1}{2}(x^2+1)(\operatorname{arcctg} x)^2+x\operatorname{arcctg} x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. **11.96.** $\frac{1}{8}\operatorname{arctg}\frac{x}{8}$. **11.98.** $\frac{1}{18}\ln\left|\frac{x-9}{x+9}\right|$. **11.100.** $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x-5}{4}$. **11.101.** $\frac{1}{\sqrt{14}}\operatorname{arctg}\frac{x+6}{\sqrt{14}}$. **11.102.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\sqrt{2}(x-1)$. **11.104.** $\frac{\sqrt{3}}{12}\ln\left|\frac{x+2-2\sqrt{3}}{x+2+2\sqrt{3}}\right|$. **11.106.** $\frac{\sqrt{7}}{28}\times\ln\left|\frac{2(x+1)-\sqrt{7}}{2(x+1)+\sqrt{7}}\right|$. **11.108.** $\frac{2\cancel{\sqrt{11}}}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{11}}$. **11.110.** $\frac{1}{2}\ln|x^2+4x-7|$. **11.112.** $\frac{1}{2}\ln|x^2+2x+5|+\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}$. **11.114.** $\ln|(x-2)+\sqrt{x^2-4x+5}|$. **11.116.** $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|(x+1)+\sqrt{x^2+2x+\frac{4}{3}}\right|$. **11.118.** $\ln|(x-3)+\sqrt{x^2-6x}|$. **11.120.** $\arcsin\frac{x-2}{4}$. **11.122.** $\frac{\sqrt{2}}{2}\arcsin\frac{\sqrt{2}(x-1)}{3}$. **11.124.** $\frac{x+2}{2}\sqrt{x^2+4x+13}+\frac{9}{2}\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x+13}|$. **11.126.** $-\frac{\sqrt{3}}{3}\times\ln\left|\frac{-x}{2(x+2)}+\sqrt{\frac{x^2+x+1}{3(x+2)^2}}\right|$. (*Указание*. Положить $x+2=1/t$.) **11.136.** $x^2/2-x+9\ln|x+4|$. **11.138.** $x^2/2-x+3\ln|x-5|$. **11.140.** $x^3/3-x+6\operatorname{arctg} x$. **11.142.** $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}\right|+\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}(2x-1)}{3}$. **11.144.** $\ln\frac{|x+2|(x-5)^2}{|x+1|}$. **11.146.** $\ln\frac{(x+4)^2|x+2|}{|x-1|}$. **11.148.** $12\ln|x+3|-11\ln|x+2|-\frac{7}{x+2}$. **11.150.** $\ln|x-2|-\frac{10x-23}{2(x-2)^2}$. **11.152.** $-\frac{1}{2(x+3)^2}$. **11.154.** $\frac{9}{14}\ln\left|\frac{x^2-2x+4}{x^2+2x+1}\right|-\frac{11}{7\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}}$. **11.156.** $\frac{1}{26}\left(\ln\left|\frac{(x+3)^2}{x^2-x+1}\right|+22\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$. **11.158.** $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{(x+1)^5(x+2)^2(x-2)}{(x-1)^2}\right|$. **11.160.** $\ln\left|\frac{(x-3)(x^2-4)}{(x+3)^2}\right|$. **11.162.** $\frac{x}{2}-\frac{\sin 6x}{12}$. **11.164.** $\frac{\cos^3 x}{3}-\cos x$. **11.166.** $-\frac{\cos^8 x}{8}$. **11.168.** $\frac{\sin^3 x}{3}-\frac{2\sin^5 x}{5}+\frac{\sin^7 x}{7}$. **11.170.** $\frac{3x}{8}-\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}$. **11.172.** $\frac{1}{16}\left(x+\frac{\sin^3 2x}{3}-\frac{\sin 4x}{4}\right)$. **11.174.** $\frac{1}{32}\left(\frac{3x}{8}-\frac{\sin 4x}{8}+\frac{\sin 8x}{64}-\frac{\sin^5 2x}{10}\right)$. **11.176.** $\frac{\sin^4 x}{4}-\frac{\sin^6 x}{6}$. **11.178.** $\frac{\sin^8 x}{8}-\frac{\sin^{10} x}{10}$. **11.180.** $\frac{\cos 2x}{4}-\frac{\cos 8x}{16}$. **11.182.** $\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 16x}{32}$. **11.184.** $\frac{5}{6}\cos\frac{3x}{5}-\frac{\cos x}{2}$. **11.186.** $\frac{2}{\sqrt{65}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{5}{13}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$. **11.188.** $\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\left(\frac{4\operatorname{tg}(x/2)+3}{\sqrt{7}}\right)$. **11.190.** $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{3}\right)$. **11.192.** $\frac{1}{3}\ln\left|3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2\right|$. **11.194.** $\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\left(\frac{3\operatorname{tg}(x/2)+1}{2\sqrt{5}}\right)$. **11.197.** $\frac{1}{20}\operatorname{arctg}\left(\frac{4}{5}\operatorname{tg} x\right)$. **11.198.** $6\left(\frac{x^{5/6}}{5}+\frac{x^{2/3}}{4}+\frac{x^{1/2}}{3}+\frac{x^{1/3}}{2}+x^{1/6}+\ln|\sqrt[6]{x}-1|\right)$. **11.200.** $\ln\left|\frac{(\sqrt[12]{x}+1)^{12}}{x}\right|-\frac{12}{\sqrt[12]{x}}$. **11.202.** $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{3x+4}-2}{\sqrt{3x+4}+2}\right|$. **11.204.** $3\ln|\sqrt[6]{2x-1}-1|-3\ln\sqrt[6]{2x-1}$. **11.206.** $\frac{3}{2}x^{2/3}-\frac{18}{5}x^{5/6}+3x-\frac{6}{7}x^{7/6}$. **11.208.** $\frac{x^2-2}{3}\sqrt{x^2+1}$. **11.210.** $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. **11.212.** $3\operatorname{arctg}\sqrt[3]{x}$. **11.213.** $\frac{\operatorname{sh} 2x}{2}$. **11.215.** $\ln(\operatorname{ch} x)$. **11.217.** $4\operatorname{th}\frac{x}{4}$. **11.219.** $\frac{\operatorname{sh} 8x}{16}-\frac{x}{2}$.

* В ответах к задачам 11.1—11.268 опущена произвольная постоянная C.

11.221. $x-\frac{\operatorname{cth} 5x}{5}$. **11.223.** $\operatorname{sh} x+\frac{\operatorname{sh}^3 x}{3}$. **11.225.** $\frac{\operatorname{sh}^4 x}{4}$. **11.227.** $\frac{\operatorname{sh} 4x}{32}-\frac{\operatorname{sh} 2x}{4}-\frac{3x}{8}$. **11.229.** $\frac{x}{16}-\frac{\operatorname{sh} 4x}{64}+\frac{\operatorname{sh}^3 2x}{48}$. **11.233.** $\frac{\operatorname{sh}^2 2x}{48}+\frac{\sin 4x}{64}-\frac{x}{16}$. **11.235.** $x \operatorname{ch} x-\operatorname{sh} x$. **11.237.** $x^3 \operatorname{ch} x-3(x^2 \operatorname{sh} x-2x \operatorname{ch} x+2 \operatorname{sh} x)$.
11.239. $-2 \operatorname{sh} \sqrt{2-x}$. **11.241.** $2\sqrt{x} \operatorname{sh} \sqrt{x}-2 \operatorname{ch} \sqrt{x}$. **11.243.** $\frac{1}{2}(\operatorname{sh} x \sin x-\operatorname{ch} x \cos x)$. **11.245.** $-2 \operatorname{cth} x-\frac{7}{\operatorname{sh} x}$. **11.247.** $-\frac{1}{3 \operatorname{ch}^3 x}$. **11.249.** $\frac{(3x+7)^6}{54}-\frac{7(3x+7)^5}{45}$. **11.251.** $-\frac{2}{3}\sqrt{1-x^3}$. **11.253.** $\frac{1}{4}\ln|x^4+\sqrt{x^8-3}|$.
11.255. $\frac{1}{8} \operatorname{arctg} \frac{e^{4x}}{2}$. **11.257.** $-\ln|\cos x+\sqrt{\cos^2 x+1}|$. **11.259.** $\frac{x}{32}\sqrt{x^2+16}+\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+16}|$. **11.261.** $-\frac{\sqrt{5}}{5}\ln\left|\frac{2x+1}{5(x-2)}+\sqrt{\frac{x^2+1}{5(x-2)^2}}\right|$.
11.263. $\frac{1}{8}\left(\ln\left|\frac{(x-1)^3}{(x+1)(x^2+1)}\right|-4 \operatorname{arctg} x+\frac{2}{x^2+1}\right)$. **11.267.** $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x+6}\right|$.
11.268. $\frac{1}{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x+1}{3}\right)$. **11.270.** $\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sin x+4-\sqrt{6}}{\sin x+4+\sqrt{6}}\right|$.
11.272. $\frac{1}{6} \operatorname{arctg}\left(\frac{2 \operatorname{th} x}{3}\right)$. **11.274.** $\operatorname{arctg}(\operatorname{th} x+3)$.

12

12.1. 7. **12.2.** 45. **12.3.** 64. **12.4.** $2b^5/15$. **12.5.** 14/3. **12.6.** $5/2-4\ln 2$. **12.7.** 2/3. **12.8.** $5\pi/2$. **12.9.** $3\pi/8$. **12.10.** $5\sqrt{2}/6$. **12.11.** $43\sqrt{2}/60$. **12.12.** $5\pi/32$. **12.13.** 4π. **12.14.** $(e^2+1)/4$. **12.15.** $\pi/4$. **12.16.** π^2. **12.17.** $\pi-2$. **12.18.** $\pi/8\,(\pi^2/6-1)$. **12.19.** 1. **12.20.** 1. **12.21.** π. **12.22.** $2\sqrt{2}\pi$. **12.25.** 14/15. **12.26.** 2π. **12.27.** $\pi a^2/2$. **12.29.** $\ln(2+\sqrt{2})/(1+\sqrt{3})$. (*Указание.* Подстановка $\sqrt{2+x^2}=t$.) **12.30.** $3\pi R^4/16$. **12.31.** $4\sqrt{2}\pi$. **12.32.** $80\sqrt{2}\pi$. **12.33.** 20/3. **12.34.** 0. **12.36.** $(\ln 3)/2$. **12.37.** 7/6. **12.38.** $(\operatorname{sh}^2 2)/2$. **12.39.** $(8\sqrt{2}-7)/15$. **12.40.** $2(4\sqrt{2}-5)/15$. **12.41.** $(1/2)\ln 1{,}5$. **12.43.** $\pi/4$. **12.44.** $\pi/12$. **12.46.** $\pi/2$. **12.48.** $2-5\ln(5/3)$. **12.49.** 35/8. **12.50.** $5\pi/4$. **12.51.** 2. **12.52.** $8\sqrt{2}/3$. **12.53.** 32/3. **12.54.** 32/3. **12.55.** 32/3. **12.56.** 32/3. **12.57.** 36. **12.58.** 32/3. **12.59.** 125/6. **12.60.** 1/6. **12.61.** 9/2. **12.62.** 9/2. **12.64.** $\pi/3$. **12.65.** $40+18\ln 3$. **12.67.** $1{,}5-\ln 2$. **12.68.** $\pi-4/3$. **12.69.** 3/4. **12.70.** 32/15. **12.71.** $64/3-4\pi$. **12.72.** 27/4. **12.73.** 176/15. **12.75.** 11/30. **12.77.** $3\pi/2$. **12.78.** 12π. **12.79.** 9. **12.80.** 4. **12.81.** πab. **12.82.** $3a^2\pi/8$. **12.84.** $3a\pi$. **12.85.** a^2. **12.87.** 3π. **12.88.** $4{,}5\pi$. **12.89.** $3a^2\pi/2$. **12.90.** $a^2\pi/4$. **12.91.** $2\sqrt{3}$. **12.92.** $(\ln 3)/2$. **12.93.** $(7{,}5+\ln 4)/2$. **12.94.** $\pi^2/4$. **12.95.** $(\operatorname{ch} 4-1)/2$. **12.96.** 24. **12.97.** 6π. **12.98.** 32π. **12.99.** $4\pi/15$. **12.100.** $a^3\pi(e^2-e^{-2}+4)/4$. **12.101.** $8\pi a^3/3$. **12.102.** $4\pi ab^2/3$. **12.103.** π. **12.104.** $4\pi/15$. **12.105.** $32a^2\pi/105$. **12.106.** $19{,}2\pi$. **12.107.** $6\pi^3 a^3$. **12.108.** $\pi(\sqrt{5}-\sqrt{2})+\pi\ln(2(\sqrt{2}+1)/(\sqrt{5}+1))$. (*Указание.* Подстановка $\cos x=\sqrt{\operatorname{sh} t}$.) **12.109.** $\pi(e-1)(e^2+e+4)/3$. **12.110.** $64\pi a^3/3$. **12.111.** $128a^3\pi/5$. **12.112.** $16\pi^2 a^2$. **12.113.** $12a^2\pi/5$. **12.114.** $\approx 1{,}9$ кг. **12.115.** $5e^{-0{,}2t}$. **12.116.** $1000/(10+t)^2$. **12.117.** $N_0 e^{-\lambda t}$. **12.118.** 0,0031. **12.119.** $20+80(1/2)^{t/20}$. **12.121.** 40 мин. **12.122.** 10 мин. **12.123.** 24 мин. **12.124.** 200 дней. **12.125.** 1575 лет. **12.126.** $5(2+\sqrt{2})\approx 17{,}07$ мин. **12.127.** $c\ln(M/m)$.

13

13.1. 1/5. **13.2.** 1/6. **13.3.** 1/3. **13.4.** 1/4. **13.5.** 1/105. **13.6.** 1/630. **13.7.** Сходится. **13.8.** Сходится. **13.9.** Расходится. **13.10.** Сходится. **13.11.** Сходится. **13.12.** Сходится. **13.13.** Сходится. **13.14.** Сходится. **13.15.** Сходится. **13.16.** Сходится. **13.17.** $\pi^2/8$.

13.19. 2/13. **13.20.** $b/(a^2+b^2)$. **13.21.** 1. **13.23.** 1/2. **13.25.** 1. **13.26.** $(\ln 9)/4$. **13.27.** $\pi/4$. **13.28.** $\pi/3$. **13.29.** π. **13.31.** Расходится. **13.32.** Расходится. **13.33.** Сходится. (*Указание.* Подстановка $x=\sin t$.) **13.34.** Сходится. **13.35.** Сходится. **13.36.** Сходится. **13.37.** Расходится. **13.38.** Расходится. **13.39.** Сходится. **13.40.** Сходится. **13.41.** Сходится. **13.42.** Сходится. **13.43.** $\alpha<1$. **13.44.** $\alpha>0$. **13.45.** $\alpha>0$, $\beta>0$. **13.46.** $\alpha<1$. **13.47.** $\alpha>1$. **13.48.** Расходится при любом α. **13.49.** 4. **13.50.** 3/2. **13.51.** $\sqrt{3}/2$. **13.52.** π. **13.53.** π. **13.54.** $1/\ln 2$. **13.55.** $2\sqrt{2}/5$. **13.57.** $\pi/2$. (*Указание.* Подстановка $1-x=t^2$.) **13.58.** $\pi/2$. **13.59.** -1. **13.60.** 1/4.

14

14.1. $I_1=0{,}32962$, $I_2=0{,}33202$, $I=1/3$. **14.2.** 1) 0,83502; 2) 0,74766; 3) 0,68976; 4) 0,64719; 5) 0,61392; 6) 0,58684. **14.3.** 1) 0,47280; 2) 0,26527; 3) 0,18187; 4) 0,13872; 5) 0,11309. **14.4.** 1) 0,00521; 2) 0,00783; 3) 0,01045; 4) 0,01307; 5) 0,01568; 6) 0,01830; 7) 0,02109; 8) 0,02409; 9) 0,02709; 10) 0,03008; 11) 0,03307; 12) 0,03607; 13) 0,03906; 14) 0,04206; 15) 0,04506; 16) 0,04806. **14.5.** 3. **14.6.** 3. **14.7.** 3. **14.8.** 5. **14.9.** 2. **14.10.** 13. **14.11.** 10. **14.12.** 4. **14.13.** 26. **14.14.** 23. **14.15.** 49. **14.16.** 12. **14.17.** 2,682. **14.18.** 1,414. **14.19.** 0,916. **14.20.** 0,693. **14.21.** $-0{,}161$. **14.22.** 2,320. **14.23.** 0,636. **14.24.** 0,882. **14.25.** 0,876. **14.26.** 1) 0,6931; 2) 0,5493; 3) 0,4621; 4) 0,4024; 5) 0,3584; 6) 0,3248; 7) 0,2970; 8) 0,2747; 9) 0,2568; 10) 0,2411. **14.27.** 1) 0,67363; 2) 0,53098; 3) 0,44628; 4) 0,38890; 5) 0,34699; 6) 0,31483; 7) 0,28926; 8) 0,25310. **14.28.** 1) 0,012518; 2) 0,012516; 3) 0,012504; 4) 0,012467; 5) 0,012381; 6) 0,012210; 7) 0,011920; 8) 0,011480; 9) 0,010883; 10) 0,010174; 11) 0,009532; 12) 0,009094; 13) 0,009550; 14) 0,011499; 15) 0,016786. **14.29.** 1) 0,009967; 2) 0,785398; 3) 0,231824; 4) 0,107250; 5) 0,061245; 6) 0,039479; 7) 0,027525; 8) 0,020270; 9) 0,015544; 10) 0,012295. **14.30.** 0,39266. **14.31.** 0,835653. **14.32.** 5,652639. **14.33.** 2,094596. **14.34.** 0,670873. **14.35.** 0,746825. **14.36.** 2,4219. **14.40.** $2n_1=4$, $2n_2=6$, $2n_3=10$. **14.41.** $2n_1=4$, $2n_2=6$, $2n_3=8$. **14.42.** $2n_1=4$, $2n_2=6$, $2n_3=8$. **14.43.** $2n_1=6$, $2n_2=10$, $2n_3=18$. **14.44.** $2n_1=6$, $2n_2=12$, $2n_3=20$. **14.45.** $2n_1=2$, $2n_2=4$, $2n_3=6$. **14.46.** 1,000001. **14.47.** 4,67078. **14.48.** 1,414214. **14.49.** 0,916402. **14.50.** 2,6823. **14.51.** 0,89670.

15

15.1. $A+B=\begin{bmatrix}4 & -2 & 4\\ 11 & 3 & -3\end{bmatrix}$, $A-B=\begin{bmatrix}-2 & -2 & 6\\ -3 & -13 & 15\end{bmatrix}$. **15.2.** $\begin{bmatrix}3 & -9 & -6\\ 1 & -2 & -13\end{bmatrix}$. **15.4.** 1) $\begin{bmatrix}6 & -12\\ 12 & -18\end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix}-9 & 18\\ -18 & 27\end{bmatrix}$. **15.5.** 1) $\begin{bmatrix}0 & 2\\ -3 & 5\end{bmatrix}$. **15.6.** 1) $\begin{bmatrix}-3 & 7\\ -11 & 15\end{bmatrix}$. **15.7.** $m=3$, $l=5$. **15.8.** $n=3$, $l=4$. **15.9.** $n=k$. **15.10.** 1) Да; 2) нет; 3) да. **15.11.** 1) Да; 2) нет; 3) да; 4) нет; 5) да; 6) нет; 7) нет; 8) нет; 9) да; 10) нет. **15.13.** $AB=\begin{bmatrix}8 & 6\\ 8 & 1\end{bmatrix}$, $BA=\begin{bmatrix}-2 & 4 & -5\\ -13 & 6 & -5\\ -20 & 0 & 5\end{bmatrix}$. **15.15.** 49. **15.16.** BA не существует. **15.17.** $[-1]$ (матрица состоит из одного элемента). **15.19.** $\begin{bmatrix}-9 & -10\\ -13 & -14\end{bmatrix}$. **15.20.** $\begin{bmatrix}-4 & 4\\ -4 & 4\end{bmatrix}$. **15.21.** $\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$. **15.23.** $\begin{bmatrix}-22 & 10\\ -15 & 9\end{bmatrix}$. **15.34.** $AB=\begin{bmatrix}18 & -11 & -24\\ 14 & -11 & -48\\ -6 & 6 & 33\end{bmatrix}$. **15.35.** $AB=\begin{bmatrix}1 & 5 & -5\\ 3 & 10 & 0\\ 2 & 9 & -7\end{bmatrix}$. **15.36.** $AB=\begin{bmatrix}11 & -22 & 29\\ 9 & -27 & 32\\ 13 & -17 & 26\end{bmatrix}$. **15.39.** 9. **15.40.** -6. **15.41.** 0. **15.42.** 4. **15.43.** 12. **15.44.** -18. **15.45.** $x=2$. **15.46.** $x_1=-2$, $x_2=2$. **15.47.** $x_1=0$, $x_2=-3$, $x_3=3$. **15.48.** $x_1=0$, $x_2=2$. **15.49.** -4. **15.50.** -5. **15.51.** 18. **15.52.** 5. **15.53.** 20. **15.54.** -22. **15.55.** 6. **15.56.** -9. **15.58.** 0. (*Указание.* Из первого и второго столбцов вычесть третий.) **15.59.** -396. **15.60.** 48. **15.61.** 444. **15.62.** -453. **15.63.** 168. **15.64.** $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=-3$. **15.65.** $x_1=-4$,

$x_2=1$, $x_3=4$. **15.66.** $x_1=3$, $x_2=-\sqrt{2}$, $x_3=\sqrt{2}$. **15.67.** $x_1=-3$, $x_2=-2$, $x_3=3$. **15.68.** $x_1=2$, $x_{2,3}=-1\pm\sqrt{8}$. **15.69.** $x_1=-1$, $x_{2,3}=(1\pm\sqrt{109})/2$. **15.70.** 15. **15.71.** −18. **15.72.** 12. **15.73.** −6. **15.74.** 48. **15.75.** 0. **15.76.** Да. **15.77.** Нет. **15.78.** Нет. **15.79.** Да. **15.80.** Нет. **15.81.** Нет. **15.82.** Да. **15.83.** $\alpha\neq 1$. **15.84.** $\alpha\neq 2$. **15.85.** $\alpha\neq\pm 6$. **15.86.** $\alpha\neq\pm 4$. **15.87.** $\alpha\neq 1$. **15.88.** $\alpha\neq 0$, $\alpha\neq 1$. **15.90.** $\begin{bmatrix}-3 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}$.

15.91. $\begin{bmatrix}5/2 & -3\\ -3/2 & 2\end{bmatrix}$. **15.92.** $\begin{bmatrix}3 & -2\\ -4 & 3\end{bmatrix}$. **15.93.** $\begin{bmatrix}\sin\alpha & \cos\alpha\\ -\cos\alpha & \sin\alpha\end{bmatrix}$.

15.94. $\begin{bmatrix}0 & -2 & 1\\ -4 & 5 & -2\\ 5 & -3 & 1\end{bmatrix}$. **15.98.** $\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -38 & 41 & -34\\ 27 & -29 & 24\end{bmatrix}$. **15.99.** $\begin{bmatrix}-8 & 29 & -11\\ -5 & 18 & -7\\ 1 & -3 & 1\end{bmatrix}$

15.103. 3. **15.104.** 2. **15.105.** 2. **15.110.** 2. **15.111.** 2. **15.112.** 2. **15.114.** 5.

16

16.1 *. (2, −1). **16.2.** (−3, 2). **16.3.** (1, −3). **16.4.** (5, −4). **16.5.** (4, −2). **16.6.** (1/2, −1/3). **16.7.** $\lambda\neq 1$. **16.8.** $\lambda\neq -2$, $\lambda\neq 2$. **16.9.** $\lambda\neq 0$, $\lambda\neq -3$, $\lambda\neq 3$. **16.10.** (−2/5, 3/5, 3/5). **16.11.** (−1/4, 3/4, 3/4). **16.12.** (1, −1, 2). **16.13.** (1, 2, −1). **16.14.** (2, 1, −1). **16.15.** (1, −2, 1). **16.16.** (2, 1, −1). **16.17.** (3, −1, 2). **16.18.** (3, 2, −1). **16.19.** (−2, 1, 3). **16.20.** (−0,2; −4,5; 5,7). **16.21.** (8/7, −1/7, −3/7). **16.22.** (1/2, −1/4, 3/4, 1). **16.23.** (1, 1/2, −1, 1/2). **16.24.** (2, −1, 1, −2). **16.25.** (2/15, −9/15, 17/120, 159/120). **16.26.** (1, 2, −1). **16.27.** (3, 2, 1). **16.28.** (1/2, 1/3, −1/4). **16.29.** (4, −1, −1). **16.30.** $x_1=(10x_3+16)/7$, $x_2=(8x_3+3)/7$, где x_3 может принимать любые действительные значения. **16.31.** (1/2, 1/4, −1/2). **16.32.** (1, 3, 0, −2). **16.33.** (1, 2, −1, 3). **16.34.** (1, 1, 1, 1). **16.35.** (1/2, 1/3, −1/2, 1/4). **16.36.** $x_1=(5/2)-(3/4)x_4$, $x_2=(5/2)-(3/4)x_4$, $x_3=-4+(5/2)x_4$, где x_4 — любое. **16.37.** $x_1=(2/3)-(2/3)x_3+x_4$, $x_2=(4/3)+(5/3)x_3-2x_4$, где x_3, x_4 — любые. **16.38.** (0, 0, 0, 0). **16.39.** $x_1=(29/24)x_4$, $x_2=-(7/6)x_4$, $x_3=-(23/24)x_4$, где x_4 — любое. **16.40.** Система несовместна. **16.41.** (1, 2, −3, 4). **16.42.** (19/20. −1/8, 1/20, −23/10, 9/40). **16.43.** (23/25, 2/25, 29/25, −23/5, −21/5). **16.44.** (0, −3, 0, 3, 0, −2). **16.45.** (3/8, +1/8, +1/4, −1/2, −1/2, 0). **16.46.** Система имеет решение при любом α: $x_1=-5/2+\alpha/4$, $x_2=5-\alpha/2$, $x_3=-(\alpha+2)/4$. **16.48.** Система имеет решение при любом α: $x_1=(9\alpha-111)/2$, $x_2=(99-7\alpha)/4$, $x_3=(\alpha-9)/4$. **16.49.** Система несовместна при $\alpha=-2$. Если $\alpha=1$, то $x_1=6-x_2-x_3$, где x_2, x_3 — любые. **16.52.** Система несовместна при $\alpha\neq 4$. Если $\alpha=4$, то $x_1=-3-2x_2-x_4$, $x_3=4-x_4$, где x_2, x_4 — любые. **16.53.** Если $\alpha=8$, то $x_2=2x_1-2x_4+4$, $x_3=3-2x_4$, где x_1, x_4 — любые. Если $\alpha\neq 8$, то $x_1=0$, $x_2=4-2x_4$, $x_3=3-2x_4$, где x_4 — любое. **16.54.** Если $\alpha\neq 8$, то $x_3=-1$, $x_4=0$, $x_1=2-1{,}5x_2$, где x_2 — любое. Если $\alpha=8$, то $x_3=-1$, $x_1=2-1{,}5x_2+x_4$, где x_2, x_4 — любые. **16.55.** Система несовместна при $\alpha\neq 0$. Если $\alpha=0$, то $x_1=-(5x_3+13x_4+3)/2$, $x_2=-(7x_3+19x_4+7)/2$, где x_3, x_4 — любые. **16.56.** Если $\alpha\neq 1$, то $x_1=-1/3$, $x_2=2/3$, $x_3=(4\alpha+2)/15$, $x_4=(7-\alpha)/15$. Если $\alpha=1$, то $x_1=1-x_2-5x_4$, $x_3=x_4$, где x_2 и x_4 — любые. **16.60.** $x_1=1{,}3$, $x_2=1{,}2$, $x_3=1{,}1$. **16.61.** $x_1=1{,}5$, $x_2=-1{,}4$, $x_3=-1/3$. **16.62.** $x_1=2{,}1$, $x_2=2{,}2$, $x_3=2{,}3$. **16.63.** $x_1=-1{,}1$, $x_2=1{,}2$, $x_3=1{,}3$. **16.64.** $x_1=1{,}443$, $x_2=-0{,}833$, $x_3=-0{,}314$. **16.65.** $x_1=1{,}543$, $x_2=-0{,}749$, $x_3=-0{,}480$. **16.66.** $x_1=1{,}1$, $x_2=1{,}2$, $x_3=1{,}3$, $x_4=1{,}4$. **16.67.** $x_1=1{,}5$, $x_2=1{,}4$, $x_3=-1{,}3$, $x_4=1{,}2$. **16.68.** $x_1=-1{,}526$, $x_2=0{,}636$, $x_3=0{,}227$, $x_4=0{,}821$.

17

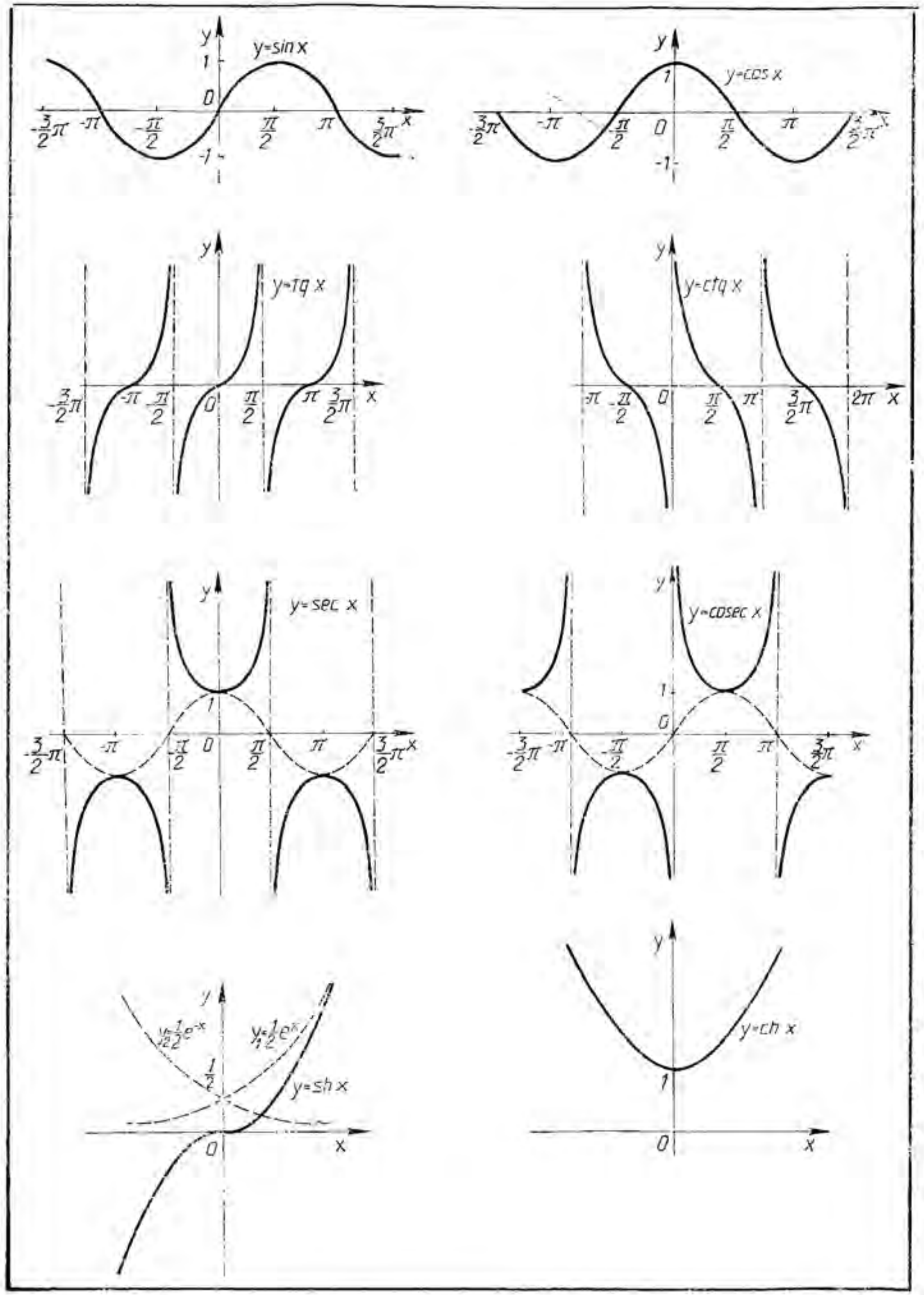
17.1. 1. **17.2.** 1. **17.3.** 3. **17.4.** 3. **17.5.** 2. **17.6.** 2. **17.7.** Уравнение имеет бесконечное множество корней. **17.8.** Уравнение имеет бесконечное множество корней. **17.9.** Действительных корней уравнение не имеет. **17.10.** Действительных корней уравнение не имеет. **17.11.** Действительных корней уравнение не имеет. **17.12.** 1. **17.13.** Отрицательных корней нет, положительные корни принадлежат интервалу (0,125; 3,5). **17.14.** $(4-2\sqrt{3}, 3)$, $(-1-\sqrt[4]{2}, -0{,}4)$. **17.15.** (0,25; 6), отрицательных корней нет. **17.18.** (6/11, 7), отрицательных корней нет. **17.19.** (0,25; 0,5). **17.20.** (−2, −1), (0, 1), (2, 3). **17.21.** (−5, −4), (0; 0,5), (0,5, 1). **17.22.** (−1, 0). **17.23.** (−1, 0), (0, 1), (2, 3). **17.24.** (0, 1). **17.25.** (1, 2). **17.26.** (−4, −3), (−2, −1), (1, 2). **17.27.** (−1,5; −0,5). **17.28.** (−2, −1), (−1, 0), (1, 2). **17.29.** (1, 2). **17.30.** (0, 1). **17.31.** (0, 1), (1, 2). **17.32.** (2, 3), (4, 5). **17.33.** (3, 4), (5, 6). **17.34.** (−2, −1), (0, 1). **17.35.** (1, 2). **17.36.** (−2, −1). **17.37.** (−1, 0), (0, 1). **17.38.** Действительных корней нет. **17.39.** (−1, 0). **17.40.** (−2, −1), (0, 1). **17.41.** (−2, −1), (0, 1). **17.42.** (0, 1), (4, 5). **17.43.** (0, 1), (1, 2). **17.44.** (1, 2), (2, 3). **17.45.** −2,25826. **17.47.** −1,05757; −0,53012; 1,58763. **17.48.** 1,66198. **17.49.** −0,69407. **17.50.** −0,68283. **17.51.** −1,22161; 0,70718. **17.52.** −1,7964; −0,7175; −0,4500; 2,0623. **17.53.** −1,36264. **17.54.** 1,0016. **17.55.** 1,141997. **17.56.** −0,65870; 0,88120. **17.57.** −1,05428. **17.58.** −1,0963; 0,8671. **17.59.** 1,89667. **17.60.** 1,42160. **17.61.** 1,32784. **17.62.** 0,27598 (меньший корень). **17.63.** 0,13655; 1,29560. **17.64.** 1,13885. **17.65.** 0,53728. **17.66.** 1,31602. **17.67.** 0,20164. **17.68.** 2,57532. **17.69.** 1,43826. **17.70.** 0,21331. **17.71.** 5,03149. **17.72.** 1,08382. **17.73.** 0,88682. **17.74.** 0,29809. **17.75.** 0,93938. **17.76.** 1,73483. **17.77.** −0,673593. **17.78.** −0,451606; 0,596969; 1,854638. **17.79.** 0,682328. **17.80.** 1,213412. **17.81.** −1,671699. **17.82.** −1,324718. **17.83.** −1,391769. **17.84.** 0,835122. **17.85.** 0,916875. **17.86.** −1,331282. **17.87.** 1,269842. **17.88.** −1,456957. **17.89.** −1,504810; 2,947529. **17.90.** −1,84187; 1,14558. **17.91.** 1,365326. **17.92.** 1,160971. **17.93.** −1,023756. **17.94.** 3,20210. **17.95.** 0,652704. **17.96.** 0,458576. **17.97.** 0,050848. **17.98.** 0,333794. **17.99.** 1,182029. **17.100.** 0,185008. **17.101.** −0,510921. **17.102.** −0,699699. **17.103.** −1,084536. **17.104.** −1,073335. **17.105.** 0,753574. **17.106.** 0,882187. **17.107.** 0,738101. **17.108.** 0,066933; 1,040280; 6,233315. **17.109.** −1,347296, −2,532089. **17.110.** −1,826651. **17.111.** −1,832412. **17.112.** −1,931852; −0,517638. **17.113.** 0,467911. **17.114.** 0,511399. **17.115.** 1,40081. **17.116.** 0,43833. **17.117.** 0,760133. **17.118.** −2,90057. **17.119.** 0,322185. **17.120.** 3,103803. **17.121.** 0,612888. **17.122.** −1,316019. **17.123.** −0,671770. **17.124.** −1,224763; 0,722964. **17.125.** −1,680494. **17.126.** 1,368018. **17.127.** 1,142324. **17.128.** 0,796544. **17.129.** −0,973676. **17.130.** −1,011830. **17.131.** −1,109329. **17.132.** −1,063787. **17.133.** 0,499038; −1,277897. **17.134.** 1,601590. **17.135.** 1,532089. **17.136.** 1,854638. **17.137.** 1,083947. **17.138.** 2,769292. **17.139.** −3,514137. **17.140.** −3,588616. **17.141.** −2,264714. **17.142.** −8,742587. **17.143.** 0,453398. **17.144.** 0,724492. **17.145.** 0,426554. **17.146.** 0,881707. **17.147.** −3,791288. **17.148.** −0,198449. **17.149.** −0,875654. **17.150.** −1,064742. **17.151.** 1,1795. **17.152.** −0,5961. **17.153.** −0,53740; −3,93543; 0,47283. **17.154.** 4,42408. **17.155.** 0,51140. **17.156.** −1,39534, 0,47463. **17.157.** −1,70004; 0,69338; 1,31023. **17.158.** 0,49274. **17.159.** −0,77809; 1,13472. **17.160.** −1,16448; −0,33379. **17.161.** −1,47709; 0,73008; 1,18611. **17.162.** 0,49629. **17.163.** 0,33338; 1,11186. **17.164.** 0,59804. **17.165.** −1,24062; 0,56049; 1,10272. **17.166.** 1,12983. **17.167.** 0,4464. **17.168.** 1,55701. **17.169.** 0,69211. **17.170.** 4,50523. **17.171.** 0,55705. **17.172.** 0,44285. **17.173.** −0,37172. **17.174.** −1,5286. **17.177.** 3.20210. **17.178.** 1,4008 (наименьший положительный корень).

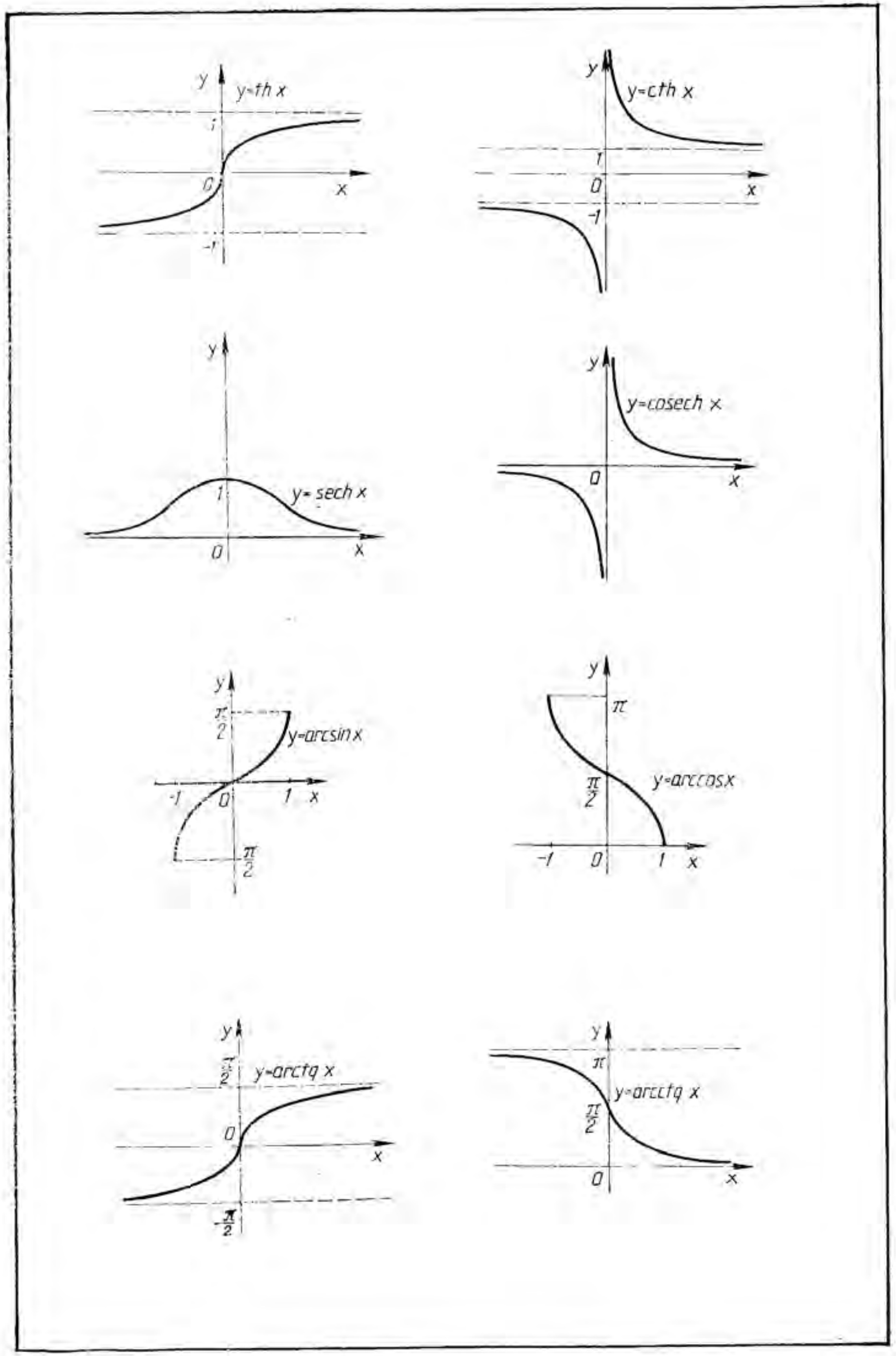
---

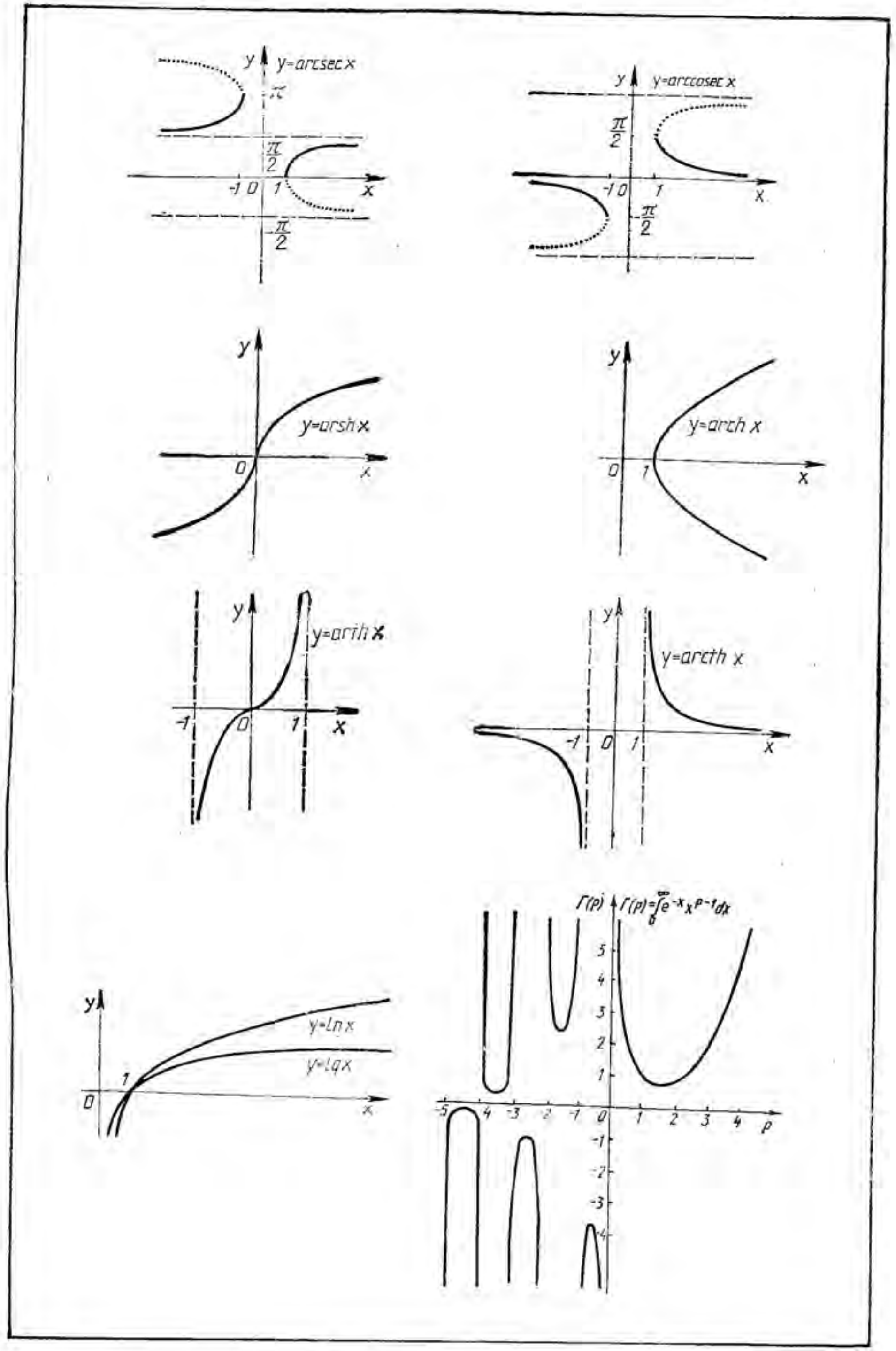
* Решение $x_1=a$, $x_2=b$ будем кратко записывать так: (a, b).

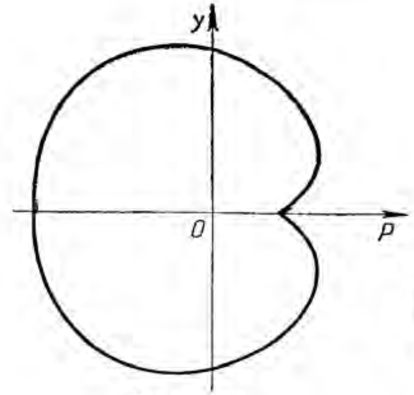
ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Графики некоторых функций

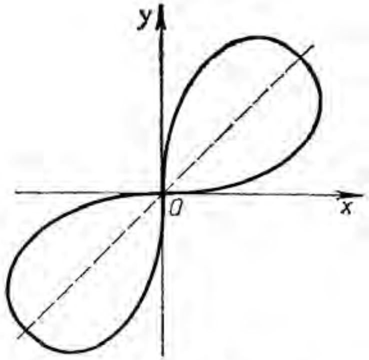




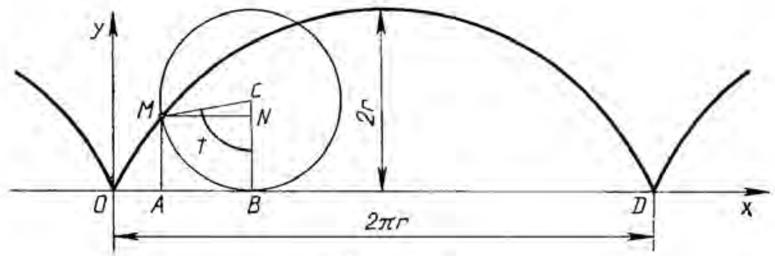




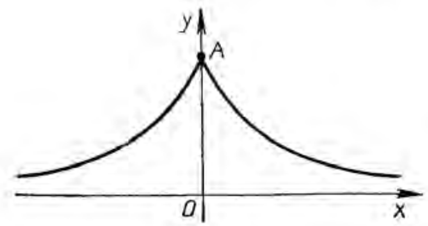
Кардиоида
$\rho = 2r(1 - \cos\varphi)$



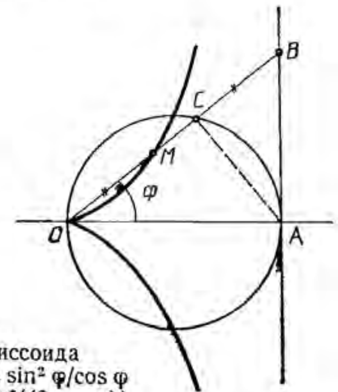
Лемниската Бернулли
$\rho^2 = 2a^2 \sin 2\varphi$
$((x^2 + y^2)^2 = 4a^2xy)$



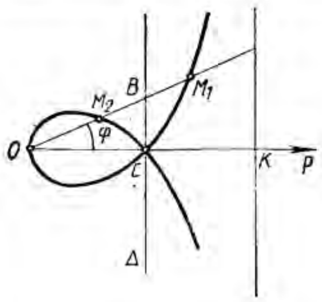
Циклоида
$x = rt - r\sin t,\ y = r - r\cos t$



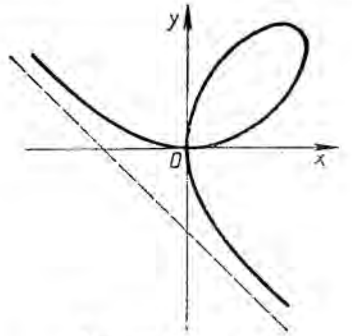
Трактриса
$x = a \ln \operatorname{tg}(t/2) + a\cos t,\ \ y = a\sin t$



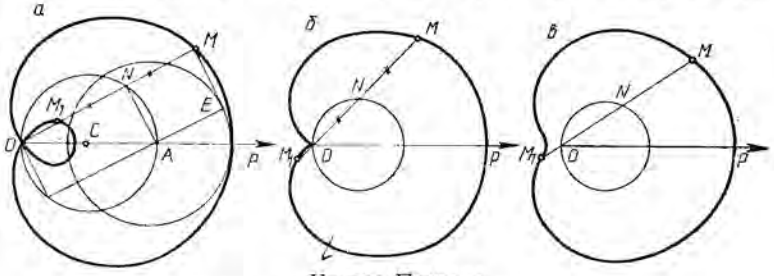
Циссоида
$\rho = 2a\sin^2\varphi/\cos\varphi$
$(y^2 = x^3/(2a - x))$



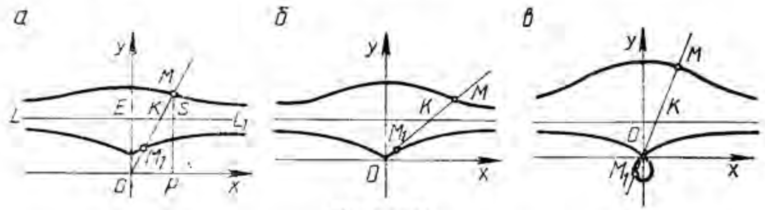
Строфоида
$\rho = a(1 \pm \sin\varphi)/\cos\varphi$
$(y^2 = (x-a)^2 x/(2a - x))$



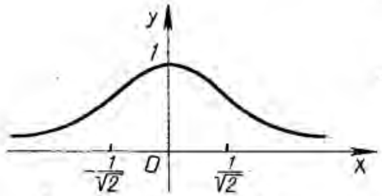
Декартов лист
$x^3 + y^3 - 3axy = 0$
$(x = 3at/(1+t^3),\ y = 3at^2(1+t^3))$



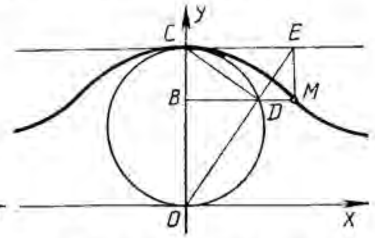
Улитка Паскаля
$\rho = 2r\cos\varphi + l$: $а - l < 2r$; $б - l = 2r$; $в - l > 2r$



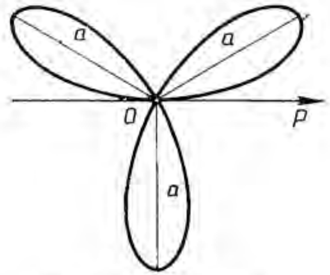
Конхоида
$\rho = c/\sin\varphi \pm l$: $а - l < c$; $б - l = c$; $в - l > c$



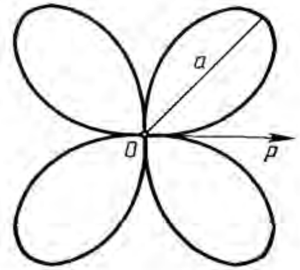
Кривая вероятностей
$y = e^{-x^2}$



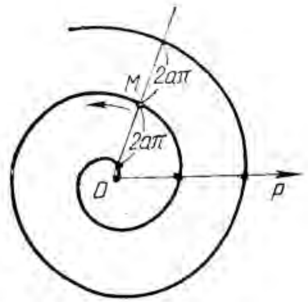
Версьера («Локон Аньези»)
$y = a^3/(x^2 + a^2)$



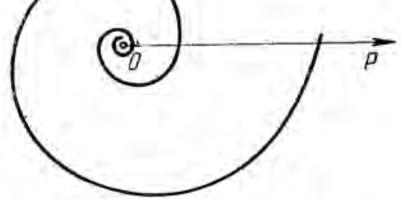
Трехлепестковая роза
$\rho = a \sin 3\varphi$



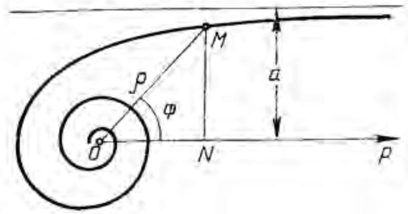
Четырехлепестковая роза
$\rho = a \sin 2\varphi$



Спираль Архимеда
$\rho = a\varphi$



Логарифмическая спираль
$\rho = a^{\varphi}$



Гиперболическая спираль
$\rho = a/\varphi$

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Батунер Л. М., Позин М. Е.* Математические методы в химической технике.— Л.: Химия, 1971.—824 с.
2. *Бугров С. Я., Никольский С. М.* Дифференциальное и интегральное исчисление.— М.: Наука, 1984.—431 с.
3. *Бугров С. Я., Никольский С. М.* Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного.— М.: Наука, 1985.—464 с.
4. *Бугров С. Я., Никольский С. М.* Задачник.— М.: Наука, 1984.—190 с.
5. *Бугров С. Я., Никольский С. М.* Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии.— М.: Наука, 1984.—190 с.
6. *Вентцель Е. С., Овчаров Л. А.* Теория вероятностей: Задачи и упражнения.— М.: Высш. шк., 1973.—366 с.
7. *Гусак А. А.* Высшая математика: В 2 т.— Мн.: Изд-во Университетское, 1983—1984.— Т. 1.—1983.—462 с.; Т. 2.—1984.—383 с.
8. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Линейная алгебра.— М.: Наука, 1978.—304 с.
9. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Основы математического анализа: В 2 ч.— М.: Наука, 1971—1980.— Ч. 1.—1971.—600 с.; Ч. 2.—1980.—448 с.
10. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа: В 2 т.— М.: Высш. шк., 1981.— Т. 1.—588 с.; Т. 2.—424 с.
11. *Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. Н., Шабунин М. И.* Сборник задач по математическому анализу.— М.: Наука, 1984.—592 с.
12. *Матвеев Н. М.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.— Мн.: Выш. шк., 1974.—768 с.
13. *Матвеев Н. М.* Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям.— Мн.: Выш. шк., 1987.—319 с.
14. *Смирнов М. М.* Задачи по уравнениям математической физики.— М.: Наука, 1975.—128 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Гусак Алексей Адамович

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ
ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ
В двух частях

Часть 1

Заведующий редакцией *Е. В. Сукач*
Редактор *М. С. Молчанова*
Младший редактор *В. М. Кушилевич*
Художник переплета
и художественный редактор
Ю. С. Сергачев
Технический редактор *М. Н. Кислякова*
Корректор *В. П. Шкредова*

ИБ № 2519

Сдано в набор 5.01.88. Подписано в печать 30.09.88. Формат $60\times90/_{16}$. Бумага тип. № 1. Гарнитура литературная. Высокая печать. Усл. печ. л. 15,5. Усл. кр.-отт. 15,5. Уч.-изд. л. 19,09. Тираж 14 000 экз. Зак. 712. Цена 95 к.

Издательство «Вышэйшая школа» Государственного комитета БССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 220048, Минск, проспект Машерова, 11.

Типография им. Франциска Скорины издательства «Наука и техника». 220600. Минск, Ленинский пр., 68. Зак. 2026.

С набора ордена Трудового Красного Знамени типографии издательства ЦК КП Белоруссии. 220041, Минск, Ленинский проспект, 79.